Leonhard Euler et les fonctions

Dès la classe de 3ème, on étudie systématiquement des fonctions de base : les fonctions affines.
En 500, Aryabatha a défini le sinus et le cosinus et en a calculé les premières tables.
En 1484, Nicolas Chuquet, en considérant la suite :

$$1,\quad a,\quad a^2,\quad a^3,\quad a^4,\quad a^5, \ldots$$

et la suite : 0, 1, 2, 3, 4, 5, …
a remarqué que : $a^p \times a^q = a^{p+q}$.
En 1614, John Napier a repris les suites de Chuquet et a appelé n le « logarithme » de a^n, a étant la « base ». Il a aussi étendu cette définition au cas où l'exposant est un nombre décimal. Il a en effet remarqué que : $a^{0,1} = 1,1$ en prenant comme base : $a = \left(1 + \dfrac{1}{10}\right)^{10}$. Ceci a conduit Napier à envisager, comme base de ses logarithmes, la limite de $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n}$ quand n augmente indéfiniment. Il a ainsi construit les premières tables de logarithmes. **[6]**
Il faut attendre 1735 pour que Leonhard Euler définisse précisément une fonction et introduise la notation $f(x)$. En particulier, en notant e la base des logarithmes népériens, il montre en 1748 que la courbe de la fonction « exponentielle » $y = e^x$ est telle que, en tout point, pente de la tangente et valeur de la fonction sont égales.

Leonhard Euler (1707-1783)

Né à Bâle.

La ville prussienne de Königsberg possédait sept ponts et deux îles. Les habitants se demandaient s'il était possible de se promener dans toute la ville et de revenir à son point de départ en ayant franchi une fois, et une seule, chaque pont. Euler eut connaissance de ce problème et il montra que c'était impossible.
En résolvant cette énigme apparemment sans importance, Euler venait de créer la théorie des graphes.

Etudions la courbe de la fonction exponentielle $y = e^x$. On calcule le quotient $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ correspondant à cette courbe (voir Isaac Newton et les dérivées).

$y + \Delta y = e^{x+\Delta x}$,

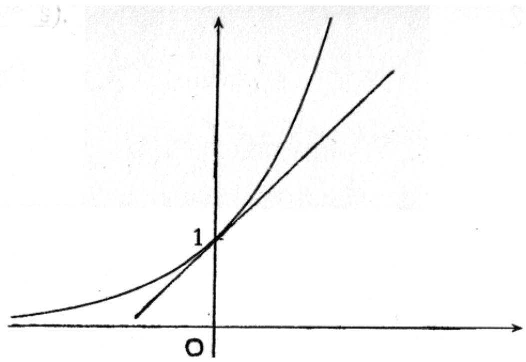
$y + \Delta y = e^x \times e^{\Delta x}$,

Or : $y = e^x$, on en déduit que :

$\Delta y = e^x \times e^{\Delta x} - e^x$,

$\Delta y = e^x (e^{\Delta x} - 1)$.

D'où : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = e^x \, \dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$.



La limite de $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ quand Δx tend vers 0, pente de la tangente à la courbe, vaut donc bien : e^x, comme celle de $\dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ vaut : 1.