

**Membres du groupe :**

- Eliott Bernard de Courville
- Johanna Charpentier
- Margot Farkas
- Tanguy Reltgen



# XV<sup>e</sup> Olympiades de Physique

2017-2018

## Les Chemins de la colère de Zeus



**Professeurs référents**

- Mme Guerra
  - M. Ménétrier
- 75006 Paris

**Ecole Alsacienne**

109 rue Notre-Dame des Champs

## Résumé

*La foudre est un phénomène aussi dangereux qu'impressionnant, d'une forme facilement reconnaissable. A travers cette Olympiade, nous nous sommes intéressés à la modélisation de sa trajectoire. Bien que nous ne puissions pas reproduire ce phénomène naturel en laboratoire, nous avons trouvé d'autres solutions pour l'étudier. Nous avons cherché les paramètres déterminants dans la trajectoire de la foudre, et pour ce faire nous avons analysé des arcs électriques à plus petite échelle, en utilisant comme générateurs une machine de Wimshurst et une bobine Tesla. Nous avons ensuite développé des modèles de simulation en 2D et en 3D basés sur les paramètres considérés (champ électrique et aléatoire). Enfin, nous avons cherché à vérifier la cohérence de nos modélisations, en comparant les dimensions fractales des résultats de nos programmes avec celles des figures obtenues expérimentalement.*

# Sommaire

<b>Résumé</b>	<b>1</b>
<b>Sommaire</b>	<b>2</b>
<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>I. Étude du phénomène et recherche des paramètres déterminants</b>	<b>3</b>
A. Étude des caractéristiques de l'éclair nuage-sol	4
B. Recherche des paramètres influençant la trajectoire de l'arc	4
<b>II. Modélisation mathématique et simulation</b>	<b>7</b>
A. Le DBM, un modèle mathématique satisfaisant pour décrire la propagation de la foudre	7
1. Le DBM et l'équation de Laplace	7
2. Fonctionnement du DBM	7
B. Programme de simulation en 2D	8
1. Résolution itérative de l'équation de Laplace en appliquant la méthode aux différences finies	8
2. Justification de la méthode itérative de résolution de l'équation de Laplace	10
3. Election du site de croissance parmi les sites de croissance potentiels	10
C. Programme de simulation en 3D	11
<b>III. Vérification de la cohérence de la simulation</b>	<b>12</b>
A. La foudre, un objet fractal	12
B. Expérience permettant de mettre en évidence la dimension fractale	14
C. Resultats et comparaison	15
<b>Conclusion</b>	<b>19</b>
<b>Remerciements</b>	<b>19</b>
<b>Annexes</b>	<b>20</b>
Images supplémentaires	20
Sources des figures	21
Bibliographie	21

## Introduction

La foudre est un phénomène qui a toujours fasciné les Hommes. Indomptable, imprévisible et destructeur, ce phénomène a longtemps été considéré comme une manifestation divine. Pourtant, dès l'Antiquité, les hommes de science se sont penchés sur la nature de la colère de Zeus : ainsi, Lucrèce écrit dans son œuvre De rerum natura : “Le ciel est ébranlé quand la foudre résonne, / Parce que dans les airs les nuages mouvants / S'entrechoquent”.

En France, on recense environ un million d'impacts par an en moyenne, responsables de 20000 sinistres chaque année, dont le coût total est estimé à 100 000 000 d'euros par an. La foudre est aussi particulièrement meurtrière : chaque année, 10 000 à 20 000 têtes de bétail sont tuées, et entre 20 et 40 personnes décèdent à la suite d'un foudroiement direct ou indirect.

Les dangers que représente cette manifestation électrique sont considérables, et ne vont cesser d'augmenter au cours des prochaines années. En effet, une étude publiée par l'American Association for the Advancement of Science affirme que l'augmentation progressive de la température de l'atmosphère va conduire à une augmentation de la densité de foudroiement partout dans le monde. Les chiffres sont impressionnants : +12% de foudroiements par degré gagné, soit une augmentation globale de 50% d'ici la fin du siècle<sup>1</sup>. Cette menace va s'intensifier, d'autant plus que les technologies numériques en plein essor sont de plus en plus nombreuses et donc vulnérables face à ce phénomène. La compréhension de ce phénomène est donc essentielle pour prévenir des dangers conséquents qu'il représente, mais la complexité des mécanismes qui régissent le déclenchement, la trajectoire et le point d'impact sont encore mal connus. Ainsi, la forme singulière que prend la rupture diélectrique qui détermine la trajectoire de l'arc électrique qui frappera le sol est facilement reconnaissable, mais il est difficile de la reproduire précisément en se basant sur des réalités physiques.

Au cours de cette Olympiade, nous avons tenté de modéliser la trajectoire de la foudre le plus exactement possible, en se basant sur les lois physiques qui l'influencent.

Pour cela, nous avons d'abord étudié le phénomène naturel qu'est la foudre, ce qui nous a permis de le reproduire à notre échelle afin de comprendre les paramètres qui régissent sa trajectoire, paramètres que nous avons fait varier dans un programme qui simule différents arcs électriques. Nous avons enfin vérifié la cohérence de notre simulation en comparant la dimension fractale des résultats obtenus avec celle des figures réalisées lors des expériences.

## I. Étude du phénomène et recherche des paramètres déterminants

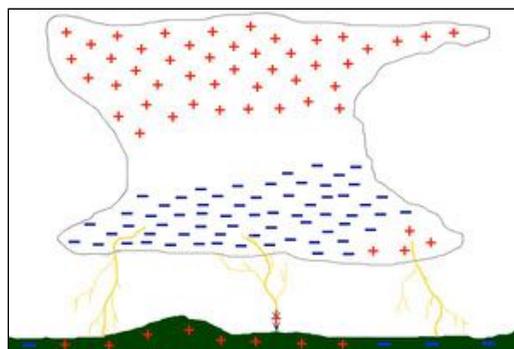
Compte tenu de l'ampleur du phénomène de rupture diélectrique qu'est la foudre, se produisant sur des distances d'environ un kilomètre et nécessitant des tensions de l'ordre du mégavolt, il est impossible de le réaliser expérimentalement. Nous avons donc cherché à reproduire ce phénomène tout en restant relativement proche de la réalité physique. Il a ainsi été nécessaire d'analyser précisément les caractéristiques de l'éclair nuage-sol afin de parvenir à un dispositif expérimental approprié.

---

<sup>1</sup> Climate change. Projected increase in lightning strikes in the United States due to global warming

## A. Étude des caractéristiques de l'éclair nuage-sol

Le nuage d'orage (cumulonimbus), est le générateur qui produit la tension nécessaire au déclenchement de l'éclair. Lors de son développement, le cumulonimbus est constitué d'un courant ascendant (air chaud) et d'un courant descendant (air froid et précipitations). Les particules charriées dans ces courants s'entrechoquent et s'arrachent des électrons, polarisant ainsi le nuage : les particules chargées positivement se situent dans l'enclume du cumulonimbus, tandis que celles chargées négativement se trouvent dans la base du nuage, à l'exception d'une petite zone de charges positives. À l'approche de la base du cumulonimbus, le sol se charge positivement par induction. On observe ainsi une structure en tripôle comme figuré ci-dessous.



*Structure du cumulonimbus [figure 1]*

Lorsque la différence de potentiel excède  $30\text{kV/m}$  (valeur moyenne de la rigidité diélectrique de l'air), une première décharge, nommée traceur pas à pas se propage vers le sol, progressant par bonds successifs. Lorsque celui-ci parvient à une distance d'environ  $50\text{m}$  du sol, le champ électrique devient suffisamment intense pour initier un traceur ascendant qui entre en contact avec le traceur descendant. Dès que le contact entre les deux traceurs s'établit, un canal d'air ionisé relie le nuage au sol. Les charges traversent alors le canal afin de rétablir l'électroneutralité entre les zones reliées. Le premier arc en retour s'initie, et correspond visuellement à une très forte intensification lumineuse de l'éclair. D'autres arcs en retours peuvent ensuite avoir lieu à travers ce même canal ionisé, jusqu'à neutraliser entièrement le nuage et le sol.

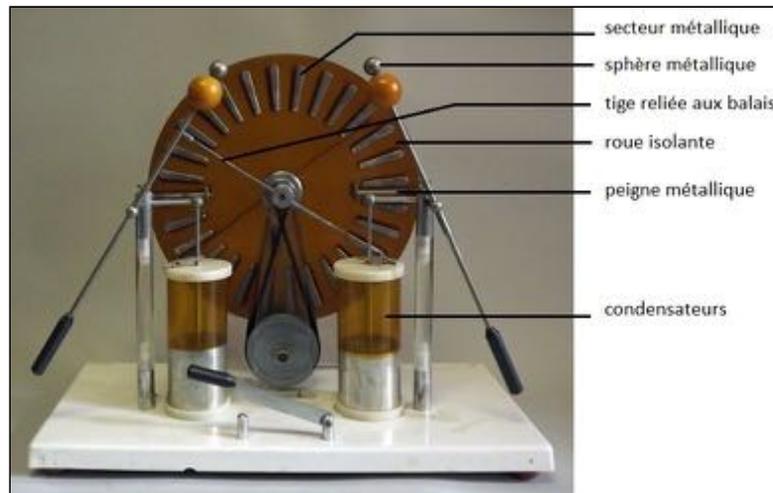
Ainsi, la trajectoire de l'éclair est uniquement déterminée par les traceurs ascendants et descendants puisque, dès lors que le canal ionisé s'établit, il reste fixe.

## B. Recherche des paramètres influençant la trajectoire de l'arc

La foudre présente une structure particulière : elle est en effet le plus souvent ramifiée, c'est-à-dire composée de plusieurs branches aux motifs irréguliers. Afin de déterminer les paramètres qui conduisent à cette structure, il était nécessaire de reproduire une décharge qui présente des caractéristiques semblables. Nous avons donc d'abord pensé à la machine de Wimshurst, capable de produire des décharges sur quelques centimètres.

La machine de Wimshurst est constituée de deux disques isolants, recouverts de secteurs métalliques, qui tournent en sens opposé. Au début de l'expérience, les secteurs sont neutres électriquement, il n'y a donc pas de tension. Deux balais en contact avec les secteurs métalliques leur arrachent des électrons par triboélectricité lorsque l'on fait tourner les disques. Des peignes métalliques captent les charges puis les dirigent vers les condensateurs, situés en-dessous d'eux. Un

des condensateurs se charge positivement et l'autre négativement. La charge des condensateurs se traduit par une augmentation de la tension électrique entre les deux sphères et permet la formation d'un arc électrique entre elles lorsqu'elles sont suffisamment rapprochées.



*Machine de Wimshurst [figure 2]*

Nous pensions d'abord pouvoir représenter la rupture diélectrique à une échelle moindre en réalisant un arc électrique entre les deux bornes de la machine de Wimshurst, puis l'étudier à l'aide d'une caméra ultrarapide du Laboratoire de Physique Statistique de l'ENS Paris Est (Photron APX RS), allant jusqu'à 100 000 images par secondes, qui nous a été prêtée par deux chercheurs de l'ENS avec lesquels nous travaillons. Pourtant, nous avons pas obtenus les résultats escomptés : ainsi, même en

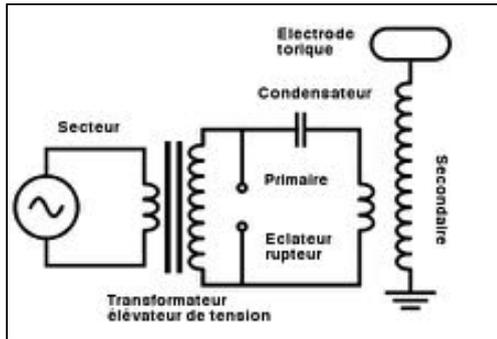


filmant l'arc à 25 000 images par seconde, nous avons obtenu une structure parfaitement rectiligne, loin des ramifications que l'on peut observer lors d'un éclair. De plus, sur un nombre d'essai important, nous avons constamment obtenu un arc identique, ce qui est contraire à ce que nous recherchions : chaque éclair est unique.

*Arc formé avec la machine de Wimshurst [figure 3]*

Cette uniformité s'explique par l'homogénéité du milieu. En effet, la rigidité diélectrique d'un gaz dépend de différents paramètres : la température, l'hygrométrie et la pression. Or, dans le cas de la foudre, la distance séparant le nuage du sol est telle que d'importantes fluctuations de ces trois paramètres ont lieu, lesquelles sont suffisantes pour influencer sur la trajectoire de l'éclair. Ce ne peut être le cas lors de notre expérience, puisque la distance entre les électrodes (5 cm au maximum) est bien trop faible pour permettre de telles fluctuations.

Pour obtenir une structure ramifiée et vérifier cette conjecture, nous avons besoin de réaliser une expérience similaire mais entre deux électrodes suffisamment éloignées, ce qui implique de travailler sur des tensions bien plus importantes. Nous avons ainsi contacté le palais de la découverte, dont les installations possèdent des voltages conséquents. Ainsi, la bobine de Tesla du laboratoire d'électrostatique, d'une tension de 2 mégaVolts, capable de produire des éclairs ramifiés sur 2 mètres semblait convenir.



Le dispositif est alimenté en courant du secteur passant par le transformateur. Ce courant charge le condensateur qui se décharge ensuite dans la bobine primaire, qui produit un champ électromagnétique. Ceci va induire une différence de potentiel aux bornes de la bobine secondaire. Pour qu'un maximum d'énergie soit transféré entre le circuit primaire et secondaire, ils présentent la même fréquence de résonance.

Schéma d'une bobine Tesla [figure 4]

La bobine nous a permis d'observer des traceurs ramifiés partant des pointes placées sur la cage de Faraday l'entourant. Nous avons filmé les arcs à l'aide d'un appareil photo réflex et la caméra ultra-rapide qui nous a été prêtée. Voici ci-dessous l'une des images prises où l'on peut observer le traceur ramifié issu de la bobine à droite ainsi qu'un second traceur qui peut être apparenté à un traceur ascendant (à gauche). On remarque que le traceur est toujours attiré par la pointe placée sur la cage entourant la Tesla, car le champ électrique y est plus faible.



Photo prise par notre appareil photo réflex de l'arc en formation [figure 5]



Photo prise par notre appareil photo réflex de l'arc électrique issu de la bobine Tesla [figure 6]

L'ensemble de ces expériences nous a donc permis d'étudier plus en détails la propagation de la foudre et de déterminer les paramètres qui régissent sa trajectoire : tout d'abord, le champ électrique qui, selon son intensité en un point, attire plus ou moins fortement la décharge, mais aussi un paramètre aléatoire, qui rend chaque éclair unique.

Nous avons ainsi mis en évidence les deux paramètres qui influent sur la trajectoire de la foudre : le champ électrique et les discontinuités du milieu, que l'on peut considérer comme un facteur purement aléatoire. Une simulation aboutie d'un éclair nuage-sol doit donc prendre en compte ces deux paramètres ainsi que leur importance dans la trajectoire de l'arc électrique.

## II. Modélisation mathématique et simulation

### A. Le DBM, un modèle mathématique satisfaisant pour décrire la propagation de la foudre

#### 1. Le DBM et l'équation de Laplace

Pour simuler la trajectoire de la foudre en deux dimensions, nous sommes tournés vers le DBM (pour Dielectric Breakdown Model), un modèle qui a été spécialement conçu pour représenter la croissance de figures dont la formation est régie par les lois de l'électromagnétisme. Développé en 1984<sup>2</sup>, il prend en compte l'équation de Laplace qui régit la trajectoire des particules dans un champ électrique.

Rappelons qu'une distribution de charges en deux dimensions génère un champ électrostatique vectoriel  $E$  dérivé d'un potentiel scalaire  $\Phi$  qui vérifie l'équation de Laplace en tout point de l'espace ne portant pas de charge :

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$

Il existe une solution unique à l'équation de Laplace pour des conditions aux limites fixées et suffisamment régulières. L'équation de Laplace signifie qu'en tout point de l'espace le potentiel est le même que la moyenne des potentiels sur une sphère de rayon suffisamment petit l'entourant. Cela indique un principe de continuité fort du potentiel.

En 2D, le potentiel électrostatique généré par une charge ponctuelle  $q$  et qui vérifie l'équation de Laplace est donné à une distance  $r$  de cette charge par :

$$V(r) \propto -\frac{\ln(r)}{2\pi}$$

#### 2. Fonctionnement du DBM

Le fonctionnement du DBM en 2D est le suivant, en notant que nous travaillons sur un plan discrétisé, une grille formée de carrés de côté 1.

Chaque itération du modèle comporte trois étapes distinctes. Dans un premier temps, il faut identifier des sites de croissance potentiels autour d'une graine. Ensuite, on calcule le potentiel électrique de chacun de ces sites en résolvant l'équation de Laplace en tenant compte des conditions aux limites imposées à la grille. Enfin, on choisit et ajoute le nouveau site de croissance en fonction des probabilités de croissance et on le définit comme faisant partie de la structure (donc ayant un potentiel fixé  $\Phi = 0$ , en effet il s'agit d'une charge).

Le modèle de croissance décrit par le DBM permet de produire des figures similaires à celles que nous avons obtenues durant nos expériences, ce qui souligne sa pertinence.

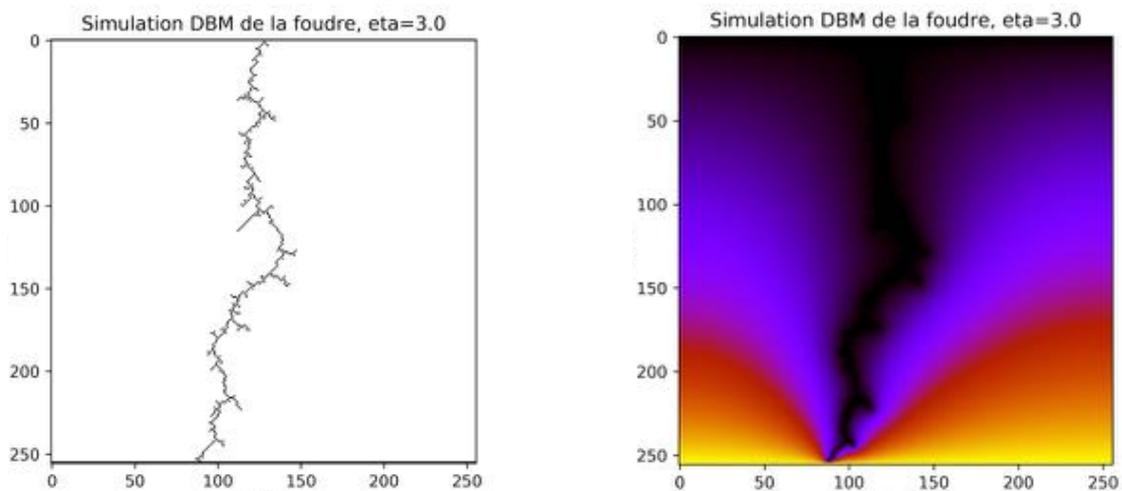
---

<sup>2</sup> L. Niemeyer, L. Pietronero et H.J. Wiesmann, 1984

## B. Programme de simulation en 2D

Afin de simuler le phénomène de rupture diélectrique qu'est la foudre, nous avons utilisé l'article de recherche de Perera<sup>3</sup> qui nous a mené à résoudre l'équation de Laplace d'une manière itérative en se basant sur les résultats de l'article de Mitra<sup>4</sup>. Des astuces d'accélération pour la recherche des candidats de croissance ont été empruntées à un article plus récent<sup>5</sup>. En effet, il n'est pas possible de trouver la formule du potentiel vérifiant l'équation de Laplace par superposition du potentiel généré par chaque charge tout en vérifiant les conditions aux limites imposées sur la surface du nuage et le sol. Une résolution itérative par relaxation est donc requise.

Un exemple de résultat de simulation avec sa carte de potentiel obtenu en utilisant notre programme en python est illustré par les figures suivantes :



Simulation de la foudre sur une grille de 512x512 pixels et la carte de potentiel correspondante [figure 7]

Notons qu'afin d'obtenir une différence de potentiel, nous avons fixé les conditions aux limites  $\varphi = 1$  sur le sol et  $\varphi = 0$  dans le nuage. Le sol et le nuage sont considérés dans cette modélisation comme des conducteurs parfaits.

### 1. Résolution itérative de l'équation de Laplace en appliquant la méthode aux différences finies

La résolution de l'équation de Laplace s'opère en appliquant la méthode aux différences finies en considérant le problème de Dirichlet et en se reposant sur l'article de Mitra.

Le problème est de déterminer la valeur du potentiel  $\phi_{i,j}$  au point de coordonnées  $(i,j)$  de la grille  $N \times N$  matérialisant la discrétisation de l'espace 2D étudié où sont disposées des charges positives et négatives.

A l'initialisation, seul le nuage est au potentiel 0 :  $\phi_{0,j}^0 = 0$  pour  $0 \leq j \leq N-1$ , et le sol est au potentiel  $\phi_{N-1,j}^0 = 1$  pour  $0 \leq j \leq N-1$ . Toute charge positive ou négative de la grille est

<sup>3</sup> M.D.N. Perera and D.U.J. Sonnadara, 2012

<sup>4</sup> A.K. Mitra

<sup>5</sup> T. Kim, A. Sud, M.C. Lin et J. Sewall, 2007

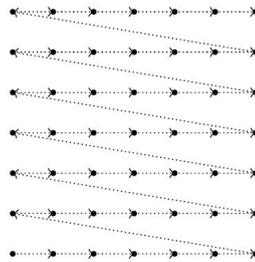
affectée d'un potentiel respectif 1 ou 0 immuable au cours du temps : elles constituent les conditions aux limites.

Le potentiel en tout autre point de la grille est déterminé par une mise à jour itérative, suivant un calcul barycentrique de pondération  $\omega$  entre sa valeur à l'itération précédente et la moyenne des potentiels des quatres voisins connexes :

$$\phi_{i,j}^{(n)} = \phi_{i,j}^{(n-1)} + \frac{\omega}{4} \delta_{i,j}, \text{ où :}$$

$$\delta_{i,j} = \phi_{i+1,j}^{(n-1)} + \phi_{i-1,j}^{(n-1)} + \phi_{i,j+1}^{(n-1)} + \phi_{i,j-1}^{(n-1)} - 4\phi_{i,j}^{(n-1)}$$

A l'itération  $n$ , la mise à jour des potentiels est effectuée séquentiellement en parcourant la grille de bas en haut (en commençant par le sol) et de gauche à droite de la manière suivante :



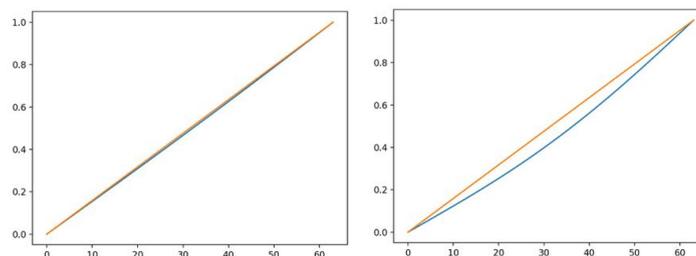
*Sens de parcours de la grille lors de la mise à jour des potentiels [figure 8]*

Il est à noter que pour la formule précédente de mise à jour à l'itération  $n$  du potentiel du point  $(i,j)$ , afin de propager plus rapidement les conditions en bordure, les valeurs les plus récentes sont utilisées quand elles sont disponibles, c'est à dire celles à l'itération  $n$  des points adjacents à gauche et en-dessous du point  $(i,j)$ . Les potentiels des points situés au-dessus et à droite du point  $(i,j)$  n'étant pas disponibles à l'itération  $n$ , on doit considérer la valeur à l'itération précédente  $n - 1$ .

On itère cette opération jusqu'à ce que le processus converge, c'est à dire que la variation de la mise à jour maximale du potentiel des points de la grille est de 0.001% de sa valeur maximale 1 :  $\epsilon = 10^{-3}$  (valeur de  $\epsilon$  donnée par la publication).

$$\max_{0 \leq i,j < N} \frac{|\delta_{i,j}|}{\phi_{i,j}^{(n)}} < \epsilon$$

Il est à noter que l'article dédié<sup>6</sup> préconise une valeur de 0.001% qui n'est pas suffisante dans notre cas pour atteindre un calcul de potentiel assez précis, comme l'attestent les figures suivantes. En effet, le potentiel croît linéairement entre deux plaques.



<sup>6</sup> M.D.N Perea et D.U.J. Sonnadara, 2012

Convergence de la courbe de potentiel bleue (effective) vers le potentiel linéaire initial en orange (théorique) pour  $\varepsilon = 10^{-4}$  (courbe de gauche) et  $\varepsilon = 10^{-3}$  (courbe de droite) [figure 9]

Nous avons donc opté pour  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

Cette méthode de résolution itérative est qualifiée de successive à sur-relaxation quand on utilise un facteur  $\omega > 1$ . Dans notre simulation, la valeur  $\omega > 1.6$  est employée afin d'accélérer la convergence.

On observe que l'étape de calcul à l'itération 0 des potentiels est la plus longue à converger. Ensuite, lors de l'ajout d'un électron perturbant la résolution précédente, la mise à jour des potentiels est beaucoup plus rapide. Sachant que le potentiel électrostatique croît linéairement entre deux plaques, nous avons donc opté pour une résolution analytique de l'équation de Laplace lors de l'étape d'initialisation afin d'optimiser le temps d'exécution du programme.

## 2. Justification de la méthode itérative de résolution de l'équation de Laplace

La dérivée seconde d'une fonction  $f$  en un point  $a$  peut s'écrire sous la forme :

$$f''(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)}{h^2}$$

Cette expression est valable lorsque  $h$  tend vers 0 quand l'espace dans lequel on considère la dérivée seconde est continu. Si nous tentons de l'appliquer à un espace 2D discrétisé avec une résolution de 1, on obtient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \approx \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{h^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{h^2}$$

Si nous prenons  $f$  la fonction qui à chaque point du bitmap associe son potentiel électrique :

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \approx \frac{\phi_{i+1,j} + \phi_{i,j+1} - 4\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j-1}}{h^2} = 0$$

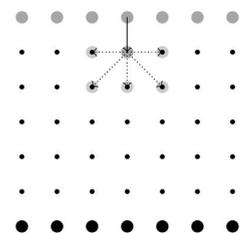
Ainsi :

$$\phi_{i,j} = \frac{1}{4}(\phi_{i+1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j-1})$$

On obtient bien par calcul que le potentiel électrique en un point  $(i,j)$  du bitmap est égal à la moyenne des potentiels des points qui l'entourent. L'idée est donc d'itérativement forcer cette relation en parcourant tout le bitmap plusieurs fois jusqu'à ce que la mise à jour des valeurs du potentiel en un point  $(i,j)$  devienne négligeable.

## 3. Election du site de croissance parmi les sites de croissance potentiels

L'ensemble des sites de croissance potentiels est constitué des points adjacents aux points de la décharge qui n'ont qu'un unique voisin chargé: supposons qu'il y en a  $n$  à cette itération du programme. Il y a au maximum 7 chemins possibles de croissance à partir d'une charge rattachée à la figure de DBM sur une grille 2D (5 en partant de la graine initiale, comme illustré ci-dessous).



Grille  $N \times N$  des sites de croissance possibles, sol charges +, nuage charges - [figure 10]

Dans son article fondateur, Niemeyer montre que la probabilité  $p_i$  que la décharge passe par le point  $i$  de croissance potentielle de potentiel  $\phi_i$  est déterminée par :

$$p_i = \frac{\phi_i^\eta}{\sum_{j=1}^n \phi_j^\eta}$$

Dans cette expression,  $\phi_i$  représente la différence de potentiel entre la charge P déjà présente sur le bitmap et la charge du nouveau point potentiel Q émanant du point P. On a donc finalement  $\phi_i$  le potentiel du point Q car le potentiel de P, point faisant partie de la figure, est nul :

$$\phi_i = \frac{E_{P,Q}}{d} = \frac{\phi(Q) - \phi(P)}{d} = \phi(Q)$$

En effet on fixe :  $\phi(P) = 0$  et  $d = 1$ .

Le variable  $\eta$  est un paramètre qui influence la dimension de croissance de la structure de décharge. Pour une valeur de  $\eta$  suffisamment grande, une ligne de dimension 1 est produite (cf annexe 1).

On peut vérifier que la somme des probabilités est bien égale à 1 :

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

Afin de choisir le site de croissance élu, il suffit donc de tirer une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$  et de lui associer le point  $i$  qui lui correspond en fonction des probabilités  $\{p_j\}_{1 \leq j \leq n}$ .

### C. Programme de simulation en 3D

Après avoir simulé la foudre en deux dimensions, nous avons tenté d'appliquer la même démarche que nous avons présenté précédemment afin d'aboutir à un programme de simulation en 3D en nous appuyant sur le DBM. Nous avons donc appliqué les formules de résolution itérative en les adaptant, en nous appuyant sur les travaux de Theodore Kim et Ming C. Lin<sup>7</sup> :

$$\phi_{i,j,k}^{(n)} = \phi_{i,j,k}^{(n)-1} + \frac{\omega}{6} \delta_{i,j,k}$$

$$\delta_{i,j,k} = \phi_{i+1,j,k}^{(n-1)} + \phi_{i-1,j,k}^{(n-1)} + \phi_{i,j+1,k}^{(n-1)} + \phi_{i,j-1,k}^{(n-1)} + \phi_{i,j,k+1}^{(n-1)} + \phi_{i,j,k-1}^{(n-1)} - 6\phi_{i,j,k}^{(n-1)}$$

Malheureusement, le temps de simulation devient prohibitif pour de grands bitmaps : cela est dû à la résolution itérative de l'équation de Laplace à chaque progression de la décharge.

Nous nous sommes alors tournés vers une résolution analytique en nous reposant sur les formules de calcul de potentiel présentées précédemment.

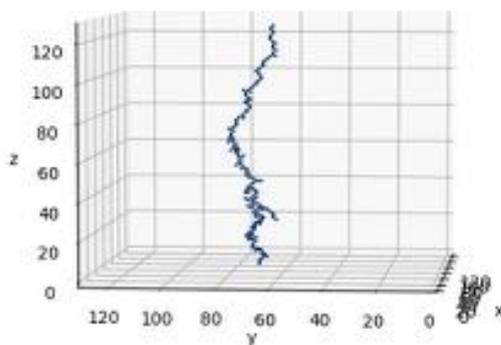
En effet, en 3D, le potentiel électrostatique généré par une charge ponctuelle  $q$  et qui vérifie l'équation de Laplace est donné à une distance  $r$  de cette charge par :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \propto \frac{1}{4\pi r}$$

Nous aboutissons à des résultats de simulation satisfaisants :

---

<sup>7</sup> Theodore Kim et Ming C. Lin, 2007



Exemple de simulation de foudre pour un bitmap 128x128x128 avec  $\eta = 60$  [figure 11]

Nous avons identifié des pistes d'améliorations, mais celles-ci dépassent nos capacités. Le principe serait de ne pas effectuer le calcul du potentiel sur un bitmap régulier mais de se reposer sur une discrétisation non régulière de l'espace 3D à l'aide d'une structure de donnée "Octree". Cette représentation reflète que l'impact de la modification du potentiel lié à l'addition d'une charge est localisé et s'estompe vite lorsqu'on s'éloigne de la charge. Il est donc nécessaire d'adopter une discrétisation adaptative, avec une fine résolution près des charges et une décroissance exponentielle au fur et à mesure que l'on s'éloigne.

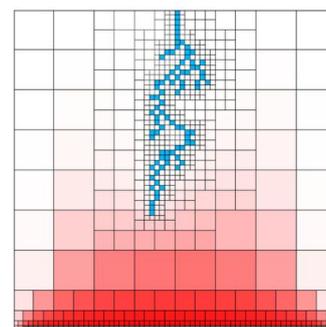


Figure illustrant le concept de discrétisation adaptative et d'octree [figure 12]

Pour parvenir à ces conclusions, nous avons exploité les recherches du Computer Graphics Laboratory de Zurich<sup>8</sup> qui exposent leur emploi du "Octree", et celles de Jonathan Richard Shewchuk<sup>9</sup> qui a permis une résolution dite par gradient conjugué utilisée dans cette nouvelle résolution. Ces travaux dépassent malheureusement nos compétences, nous n'avons donc pas pu implémenter cette meilleure résolution à notre programme de simulation.

### III. Vérification de la cohérence de la simulation

Après avoir réalisé un programme de simulation permettant de modéliser la foudre nous avons voulu vérifier la cohérence de nos simulations avec la réalité. Il a alors fallu trouver un élément de comparaison entre toutes ces figures régies par l'aléatoire. De fait, la dimension fractale de la foudre en est un.

#### A. La foudre, un objet fractal

La foudre constitue un phénomène complexe dont l'allure est chaque fois différente. En effet, comme vu précédemment, sa trajectoire est aléatoire, faisant de chaque éclair un motif unique. Cependant, l'étude des éclairs montre la présence d'une structure qui se répète à différentes échelles. L'éclair est de fait formé d'une branche principale qui se divise en de plus petites branches qui se divisent à leur tour. Dès lors, il semble que la structure de la foudre se

<sup>8</sup> Bernd Bickel, Martin Wicke et Markus Gross

<sup>9</sup> Jonathan Richard Shewchuk, 1994

caractérisé par une répétition à différentes échelles d'un même motif : c'est l'autosimilarité. Pourtant, l'éclair n'est pas exactement autosimilaire de par son tracé aléatoire. Il est en fait statistiquement autosimilaire, c'est à dire que sur un grand nombre de branchements, on obtiendra une structure qui tendra de plus en plus vers l'autosimilarité exacte.

La notion de fractale a été conceptualisée par Benoît Mandelbrot en 1974<sup>10</sup>. Un objet est fractal s'il présente une auto-similarité systématique à toutes les échelles. De nombreux phénomènes naturels présentent un caractère fractal, et l'éclair en est un. Cette nature fractale de la foudre a été mise en évidence par Niemeyer, Pietronero et Weismann dans leur article : "Fractal Dimension of Dielectric Breakdown Model".

Bien que de nombreux objets aient des dimensions entières appelées dimensions euclidiennes ( $d$ ), qui représente l'ensemble des paramètres nécessaires pour définir un objet dans l'espace (les carrés ont ainsi une dimension  $d=2$ , les cubes une dimension  $d=3$ ) ; il existe également des objets aux dimensions non entières. C'est notamment le cas des fractales dont la dimension est alors dite fractale. Notée  $D$ , elle permet notamment de décrire totalement une fractale "parfaite", c'est-à-dire à la suite d'une infinité d'itérations.

La structure fractale de la foudre lui confère ainsi une caractéristique qui se retrouve à chaque arc électrique. Le calcul de la dimension nous permet alors de vérifier la cohérence de nos expériences - ainsi que celle du programme - avec le phénomène que nous tentons de modéliser. Pour ce faire, nous avons donc comparé la dimension fractale de nos figures avec celle calculée par la Deutsche Meteorologische Gesellschaft sur 20 photographies de foudre analysées dans leur article "Contributions to Atmospheric physics"<sup>11</sup> :  $D = 1,34 \pm 0,06$ .

Le calcul d'une dimension euclidienne s'effectue selon la formule :  $n^d = k$  où  $n$  est le facteur d'agrandissement d'une figure et  $k$  le nombre de fois où la figure d'origine est présente dans son agrandissement ;  $d$  nous donne alors la dimension de la figure. Si on prend l'exemple d'un carré dont on multiplie la longueur du côté par 2 on obtient bien 4 fois le carré d'origine dans son agrandissement ce qui vérifie  $2^2 = 4$ .

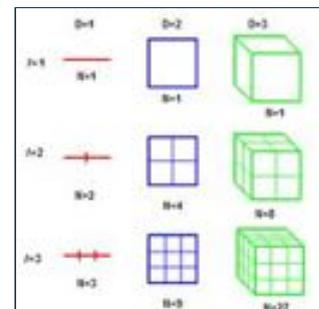


Schéma explicatif du calcul de la dimension [figure 13]

Cependant, dans le cadre des figures fractales il est extrêmement compliqué de déterminer le facteur d'agrandissement  $k$  car nous n'avons pas de figure d'origine à proprement définie. Dès lors, il faut recourir à d'autres méthodes.

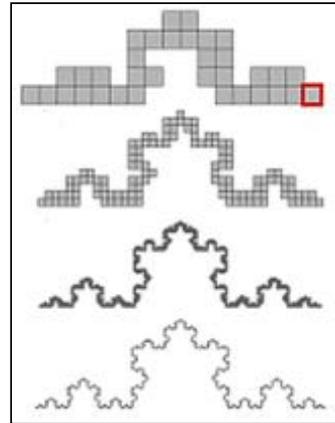
L'une des méthodes fréquemment utilisées est celle de Minkowski qui permet de calculer la dimension d'une fractale par "box-counting". Le but est de compter le nombre de carrés  $K(\varepsilon)$  de côté  $\varepsilon$  nécessaires pour recouvrir la fractale, puis d'observer l'évolution du nombre de carrés nécessaires pour recouvrir la fractale quand on diminue la taille  $\varepsilon$  du carré. Plus le côté du carré est petit plus le recouvrement de la figure est précis puisqu'alors le réseau de carrés s'adapte toujours plus précisément aux variations de la forme de la figure, comme on peut l'observer sur la figure ci-dessous.

<sup>10</sup>Les Objets fractals - Forme, hasard et dimension

<sup>11</sup>Sous la direction de F. Herbert, 1989

Illustration de la méthode de Minkowski sur le flocon de Von Koch [figure 14]

Notons que le périmètre d'une fractale de dimension 2 étant infini, une précision totale n'est obtenue que pour un nombre infini de carrés dont le côté tend vers 0. La dimension de Minkowski est donc la limite du nombre de carrés lorsque  $\epsilon$  tend vers 0.



Une fois  $K$  trouvé, on applique la formule suivante pour calculer la dimension :

$$\dim_{\text{box}}(S) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log(K(\epsilon))}{\log(1/\epsilon)}$$

L'emploi du logarithme se justifie par la définition :  $\log(a)^b = b \log(a)$  qui permet d'isoler l'exposant  $b$ . Dans cette formule,  $b$  nous donne la dimension et constitue ainsi le parallèle de  $d$  de la première formule :  $n^d = k$ .

## B. Expérience permettant de mettre en évidence la dimension fractale

Afin de comparer les dimensions fractales des figures des simulations en 2D de notre programme il a d'abord fallu établir un protocole nous permettant de réaliser des figures à notre échelle en 2D. Pour ce faire nous avons utilisé la machine de Wimshurst. L'objectif de cette expérience était de mettre en évidence les lignes de champs reliant une électrode en pointe à une électrode plane. En effet, lorsqu'il y a une différence de potentiel entre les deux électrodes, les lignes de champ qui se forment alors suivent les mêmes règles de propagation que la foudre.

Le montage que nous avons réalisé relie les sphères de la machine de Wimshurst à deux électrodes (l'une en pointe, l'autre plane). Le potentiel d'une électrode étant sensiblement le même que celui de la sphère à laquelle il est relié, la différence de potentiel entre les sphères crée un champ électrique entre les deux électrodes.

Afin de rendre les lignes de champ visibles nous utilisons des grains de semoule, des diélectriques, susceptibles de s'aligner sur ces lignes. Les chaînes d'amidon qui composent la semoule se polarisent lorsque les grains se situent dans un champ électrique suffisamment important. Les grains ainsi polarisés s'orientent (le côté positif vers la cathode et le négatif vers l'anode) sur les lignes de champ. Ainsi, ils modifient localement le champ électrique autour d'eux, ce qui influence les autres grains qui ont alors tendance à se coller à eux, formant des arcs allant d'une électrode à l'autre. Le motif dessiné par les grains témoigne alors de la présence des lignes de champ comme figuré sur les deux photos ci-dessous.

De plus, nous avons disposé la pointe et l'électrode plane dans un faible volume d'huile de ricin dans une boîte de Pétri afin de permettre la mobilité des grains de semoule et pour qu'ils soient sur un même plan.



*Photo de la boîte de Pétri comportant l'huile et les grains de semoule ; photo de la figure formée et mise en valeur du tracé de la semoule [figure 15]*

Lors de la formation et la propagation de cet arc électrique de nombreux paramètres entrent en jeu. Il a tout d'abord fallu déterminer la position de la pointe. Après de multiples tests nous avons conclu que celle-ci devait être en contact avec l'huile à une faible distance de l'électrode plane (3 cm environ) afin d'avoir un champ électrique suffisamment important pour influencer les grains de semoule. De plus les figures étaient optimales lorsque la pointe était orientée vers l'électrode.

La viscosité de l'huile permet alors d'obtenir des figures peu volatiles sans empêcher la mobilité des grains de semoule. De plus, son caractère isolant permet d'éviter une rupture diélectrique en son sein, et donc de maintenir le champ électrostatique constant. Néanmoins, nous avons constaté qu'après un nombre important d'expériences réalisées dans une même huile, des décharges s'y produisaient. On peut donc supposer que l'huile finissait par s'ioniser.

Dans ce montage, la pointe s'apparente au nuage et l'électrode plane, au sol ; l'alignement progressif des grains de semoule, soumis au champ électrique mais également à un paramètre aléatoire, peut ainsi être comparé au phénomène de propagation des électrons lors d'une décharge appliqué en 2D.

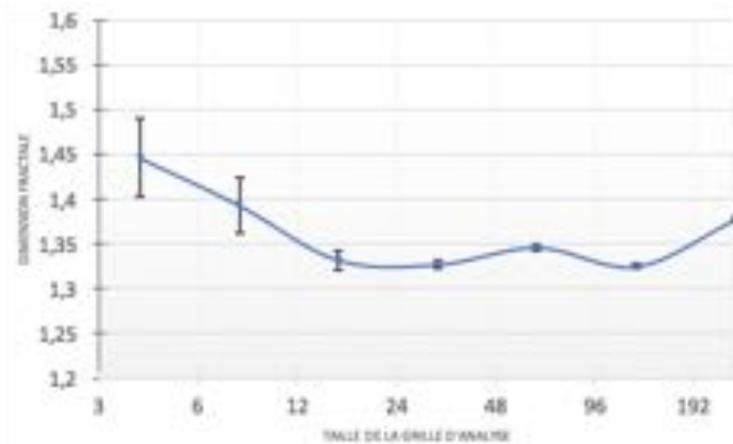
### C. Resultats et comparaison

L'application de la méthode de Minkowski sur les figures que nous avons produites à l'aide de la machine de Wimshurst demandait au préalable de tracer un quadrillage sur les photos prises. Afin d'obtenir des calculs à différents degrés de précision en fonction de  $\varepsilon$  nous avons fait varier la taille du quadrillage (cf annexe 2). Les mesures étant réalisées expérimentalement nous avons également tenté de déterminer leurs incertitudes. Pour cela, nous avons choisi aléatoirement une portion de la photo sur laquelle nous avons modifié le positionnement du quadrillage d'un demi carré sur neuf positions différentes. En comptant le nombre de carrés correspondant à la figure sur ces neuf positions, nous avons pu déterminer la moyenne du nombre de carrés sur cette portion de photo puis le généraliser à l'ensemble de la figure en voyant combien de portions de photo semblable à celle-ci comportait la photo entière, ce qui permet de déterminer une incertitude sur la dimension.

Voici le tableau récapitulatif des résultats obtenus pour le calcul des dimensions sur la figure réalisée en 2D expérimentalement.

Taille du côté de la photo (en nombre de carrés)	4	8	16	32	64	128	256
Nombre de carrés de la figure (k)	7 ± 6,05%	17 ± 6,56%	39 ± 2,97%	98 ± 1,44%	266 ± 1,44%	612 ± 1,21%	2051 ± 1,22%
Dimension fractale	1,40235 ± 0,04371	1,36145 ± 0,03158	1,32119 ± 0,01072	1,32291 ± 0,00416	1,34252 ± 0,00347	1,32247 ± 0,00249	1,37525 ± 0,00220

Tableau n°1 : des dimensions calculées sur la figure expérimentale en 2D par la méthode de Minkowski

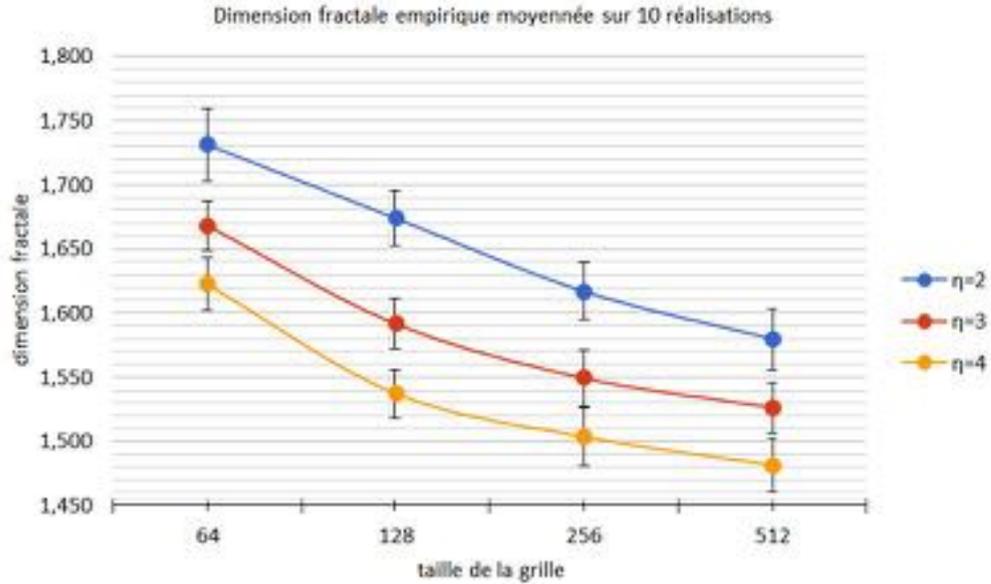


Graphique n°1 des dimensions calculées sur la figure expérimentale par la méthode de Minkowski [figure 16]

Les résultats que nous avons obtenus pour la 2D sont proches de la valeur théorique (moyenne de la dimension fractale des figures expérimentales  $\approx 1,35$  et valeur théorique  $\approx 1,34$ ). L'écart que l'on constate peut se justifier de différentes manières. Tout d'abord, cette expérience modélise l'arc électrique, mais ne constitue en aucun cas une reproduction exacte des conditions de déclenchement d'un éclair nuage-sol. De plus, les grains de semoule sont de formes variables et donnent lieu à des figures imprécises. De même, le calcul de la dimension est réalisé à partir d'une photo ce qui rend le comptage difficile. Enfin, le calcul est effectué sur une seule figure, or pour un phénomène aussi complexe et aléatoire cela ne permet pas de rendre compte précisément de la dimension fractale moyenne.

De même, nous avons réalisé le calcul des dimensions fractales des figures réalisées par notre programme de simulation en 2D. Les figures étant aléatoires, nous avons décidé de faire une moyenne du nombre de carré comptés pour dix figures de même bitmap pour que le calcul soit le plus proche possible de la valeur théorique. De plus, nous avons fait varier la valeur de  $\eta$ .

Nous aboutissons alors au graphique suivant :



Graphique n°2 des dimensions calculées par la méthode de Minkowski sur les figures de notre programme [figure 17]

On remarque que, conformément à nos attentes, la valeur de la dimension fractale obtenue tend à se stabiliser lorsque la taille du bitmap augmente. Ainsi, nous nous apercevons que pour obtenir une simulation cohérente avec la réalité, une valeur de  $\eta$  de 4 est plus appropriée car sa dimension fractale est plus proche de celle que nous avons obtenu expérimentalement. Notons que nous aurions pu avoir un plus large éventail de valeurs en choisissant des valeurs de  $\eta$  relatives, non entières.

Les résultats sont cohérents avec la valeur théorique. Néanmoins, un léger décalage apparaît entre la valeur de la dimension fractale théorique de la foudre et celle des figures obtenues. Cela peut s'expliquer par plusieurs phénomènes. Tout d'abord, le DBM considère que la surface sur laquelle se produit la décharge est parfaitement homogène, or le milieu dans lequel a lieu la rupture diélectrique ne l'est pas : la pression de l'air, la température et l'humidité évoluent en fonction de l'altitude, et la distance entre le nuage et le sol est suffisamment grande pour que ces variations soient conséquentes. Ensuite, nous avons considéré la source de potentiel (le nuage) comme étant unique et uniforme, ce qui n'est pas toujours le cas lors d'un orage où plusieurs structures électrisées cohabitent et peuvent ainsi fortement influencer la trajectoire des éclairs, donnant lieu à des structures parfois presque horizontales et/ou présentant des motifs étranges. De plus, nous avons considéré le sol comme absolument plat, alors que la topographie d'une zone est souvent plus complexe : cela influence la trajectoire des éclairs qui sont attirés par les objets pointus dépassant de la surface du sol. Enfin, le nombre de clichés analysés est relativement faible, et cela ne permet pas de rendre compte précisément de la dimension fractale moyenne.

Malgré cela, le faible écart que nous obtenons entre la valeur de la dimension des figures de nos expériences en 2D, et celle de notre programme de 2D nous permettent d'affirmer la cohérence de notre modèle avec les expériences réalisées et les mesures déjà effectuées.

De même, nous avons calculé la dimension fractale des arcs électriques en 3D produits par la bobine de Tesla ainsi que celle des figures réalisées par notre programme en 3D. Pour plus de

commodité, nous avons calculé la dimension à partir de photographies projetant ainsi le phénomène de 3D en 2D. Cette fois les calculs ont été réalisés à l'aide du logiciel imageJ. La méthode de calcul des incertitudes reste cependant la même en faisant varier la position du quadrillage sur 9 positions. Afin d'obtenir les résultats les plus fiables possibles, nous avons réalisé les calculs sur 6 photos différentes dans chaque cas.

Voici le tableau récapitulatif des résultats obtenus :

Numéro de la figure	1	2	3	4	5	6	moyenne
Dimension fractale (bobine Tesla)	1,15 ± 0,01	1,2294 ± 0,0062	1,2322 ± 0,0052	1,2476 ± 0,0053	1,2683 ± 0,0086	1,2601 ± 0,0062	1,2313 ± 0,0159

Tableau n°2 : dimensions fractales de Minkowski de 6 photos d'arcs produits par la bobine Tesla

Dimension fractale (programme 3D)	$\eta = 50$	$\eta = 60$
bitmap de 64 de côté	1,3545 ± 0,0234	1,3235 ± 0,0259
bitmap de 128 de côté	1,3522 ± 0,0183	1,2611 ± 0,0081

Tableau n°3 : dimensions fractales de Minkowski de figures produites par notre programme 3D

On remarque que les valeurs de la dimension fractale de l'arc électrique produit par la bobine Tesla, ainsi que celle des figures de notre programme est inférieure à celle des figures en 2D que nous avons analysées. On voit aussi que les figures produites par le programme dont la dimension fractale se rapproche le plus de la réalité le sont avec  $\eta = 60$ . On remarque tout de même quelques écarts entre nos mesures expérimentales et celles de la simulation : cela est dû à l'inexactitude des formules de calcul de potentiel que nous avons appliquées. Malgré cela, nous pouvons être globalement satisfaits, les résultats étant similaires à 1,08% près dans le meilleur des cas.

Ainsi, les modélisations expérimentales de la foudre nous ont permis de vérifier la cohérence de nos programmes de simulation. Le rapprochement de l'étude de figures formées par des grains de semoule dans une boîte de Pétri et de figures obtenues avec une application itérative du DBM a fourni des résultats cohérents, ce qui indique que le modèle que nous avons appliqué est suffisamment précis pour. Nous avons ensuite tenté d'adapter ce modèle à la troisième dimension, et bien que nous n'ayons pas eu le temps de perfectionner la simulation correspondante, nous pouvons d'ores et déjà présenter des résultats ayant une dimension fractale proche de celle que nous avons calculé sur des photos d'arcs électriques produits par une bobine Tesla.

## Conclusion

Au cours de cette Olympiade, nous avons travaillé sur la trajectoire de la foudre. Après avoir étudié le phénomène naturel qu'est la foudre, et avoir mis en place diverses expériences afin de comprendre les paramètres qui régissent sa trajectoire, nous avons exploité ces paramètres à travers un programme (en 2D et 3D) qui simule des arcs électriques et dont nous avons vérifié la cohérence en comparant la dimension fractale des résultats obtenus avec celle des figures réalisées lors de nos expériences. Ainsi, nous avons pu simuler informatiquement le trajet du flux électronique en se fondant sur des modèles physiques préexistants. De plus, nous avons noté que ces résultats expérimentaux sont cohérents avec les valeurs obtenues lors de précédentes recherches sur le sujet. Nous avons ainsi fini par montrer, expérimentalement et par simulation que la dimension fractale de la colère de Zeus vaut environ 1,4 et que les paramètres qui influencent sa trajectoire sont le champ électrique et, ironie du sort, le hasard.

## Remerciements

Nous remercions tout d'abord Mme Guerra et M. Ménétrier, professeurs de physique de l'École Alsacienne, pour nous avoir apporté leur aide, leur soutien et leur temps au cours de ces olympiades.

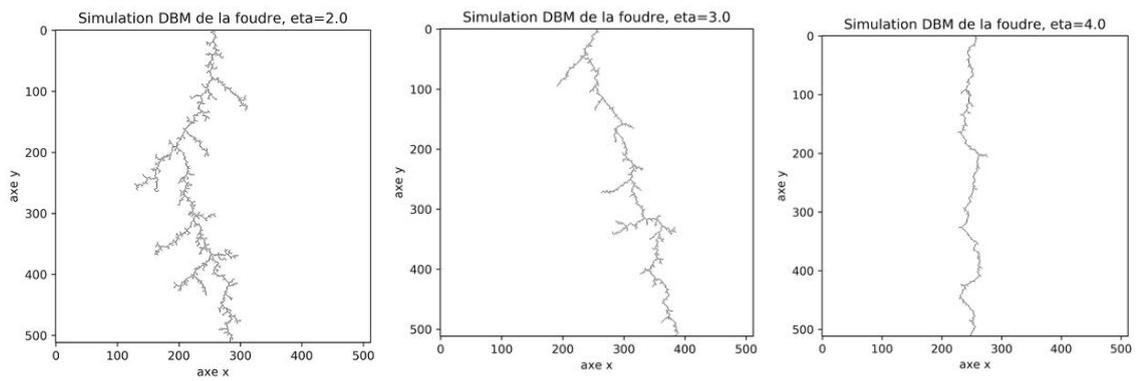
Nous remercions aussi les chercheurs de l'ENS, M. Frédéric Lechenault et Sébastien Moulinet qui nous ont prêté la caméra ultrarapide et apporté leurs précieux conseils.

Nous remercions également les modérateurs du Palais de la Découverte, et en particulier Maryline Certain pour nous avoir permis d'utiliser leurs installations.

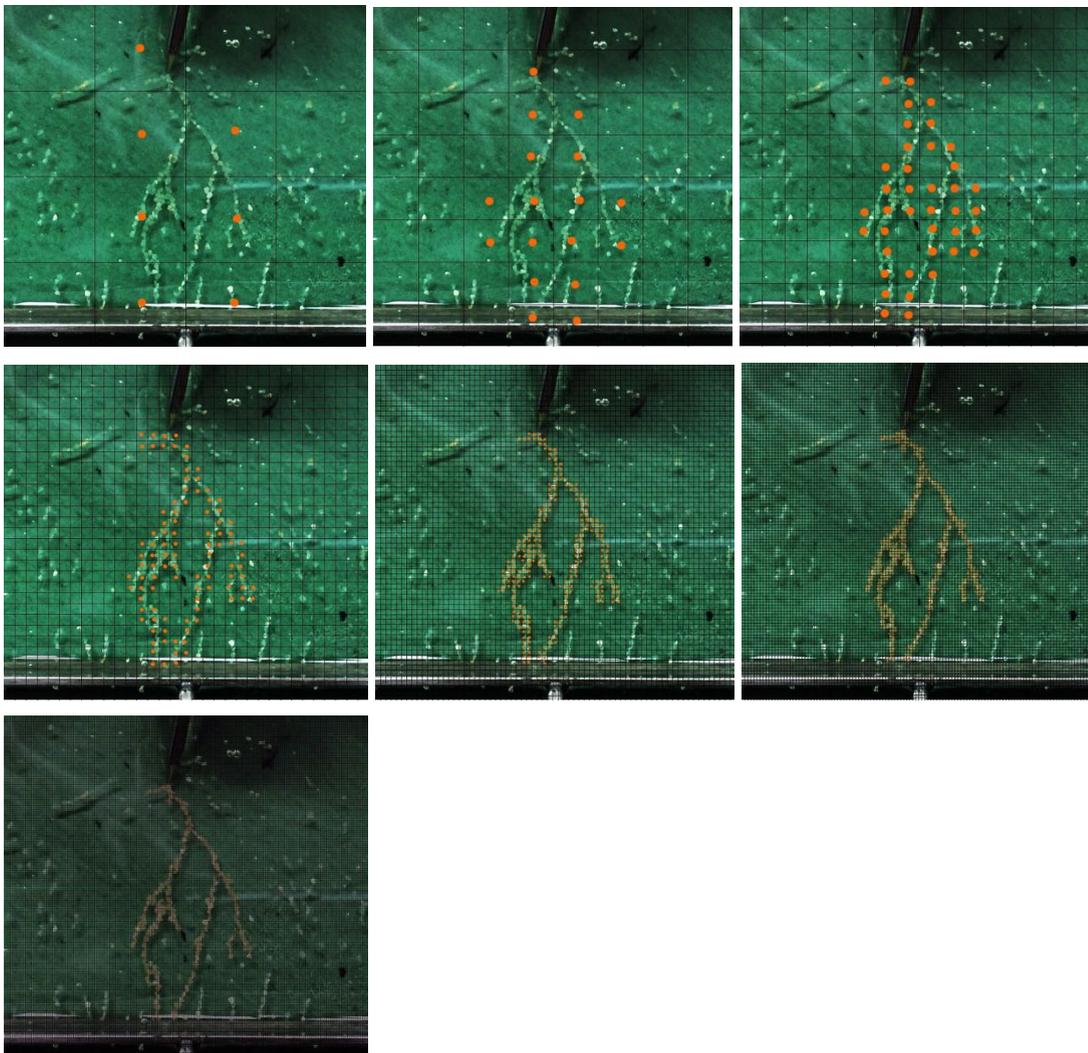
Mme Santorsola, professeur de mathématiques à l'École Alsacienne, qui nous a été d'une grande aide pour comprendre la résolution itérative de l'équation de Laplace.

# Annexes

## Images supplémentaires



Annexe 1 : Figures 18, 19, 20 : simulations avec différents paramètres  $\eta$  de DBM en 2D



Annexe 2 : figure 21 : quadrillages pour les calculs de dimension de 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 carrés de côtés

## Sources des figures

[figure 1] [http://www.chasseurs-orages.com/dossier-orage/les\\_secrets\\_de\\_la\\_foudre.htm](http://www.chasseurs-orages.com/dossier-orage/les_secrets_de_la_foudre.htm)

[figure 2] [http://patrimoines.midipyrenees.fr/index.php?id=369&L=0&notice=IM81001135&tx\\_patrimoine%5Bstate%5D=detail\\_simple&tx\\_patrimoine%5Bniveau\\_detail%5D=N31008.JPG](http://patrimoines.midipyrenees.fr/index.php?id=369&L=0&notice=IM81001135&tx_patrimoine%5Bstate%5D=detail_simple&tx_patrimoine%5Bniveau_detail%5D=N31008.JPG)

[figure 12] Bernd Bickel, Martin Wicke, Markus Gross, Computer Graphics Laboratory, *Adaptive Simulation of Electrical Discharges*

[figure 13] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Dimension\\_fractale](https://fr.wikipedia.org/wiki/Dimension_fractale)

[figure 14] <http://bitacora-de-blas-herrera.blogspot.fr/2009/06/>

Toutes les autres figures de ce mémoire ont été réalisées par nos soins : les figures 5, 6, 15 et 21 sont des photographies de Johanna Charpentier, ainsi que celle de la page de couverture.

## Bibliographie

- M.D.N. Perera and D.U.J. Sonnadara, *Fractal nature of simulated lightning channels*, 2012, <https://sljp.sljol.info/article/download/5433/4347/>
- Ambar K. Mitra, *Finite Difference Method for the Solution of Laplace Equation*, [http://www.public.iastate.edu/~akmitra/aero361/design\\_web/Laplace.pdf](http://www.public.iastate.edu/~akmitra/aero361/design_web/Laplace.pdf)
- Theodore Kim, Jason Sewall, Avneesh Sud and Ming C. Lin, *Fast Simulation of Laplacian Growth*, 2007, <http://gamma.cs.unc.edu/FRAC/>
- L. Niemeyer, L. Pietronero and H. J. Wiesmann, *Fractal Dimension of Dielectric Breakdown*, Physical Review Letters, volume 52, 1984, <http://laplace.ucv.cl/Patterns/Referencias/Pietronero-prl52-1033.pdf>
- Theodore Kim and Ming C. Lin University of North Carolina at Chapel Hill, *Fast Animation of Lightning Using An Adaptive Mesh*, IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Volume : 13, Issue : 2, March-April 2007), [http://gamma.cs.unc.edu/FAST\\_LIGHTNING/lightning\\_tvcg\\_2007.pdf](http://gamma.cs.unc.edu/FAST_LIGHTNING/lightning_tvcg_2007.pdf)
- Bernd Bickel, Martin Wicke, Markus Gross, Computer Graphics Laboratory, *Adaptive Simulation of Electrical Discharges*, ETH Zurich, In Proceedings of Vision, Modeling, and Visualization (pp. 209-216) <http://pub.ist.ac.at/~bbickel/downloads/bwg-asoed-06.pdf>
- Jonathan Richard Shewchuk, *An Introduction to the Conjugate Gradient Method Without the Agonizing Pain*, Edition 11.25, 1994, <https://www.cs.cmu.edu/~quake-papers/painless-conjugate-gradient.pdf>
- Christelle Barthe, *Etude de l'activité électrique des systèmes orageux à l'aide du modèle Méso-NH*, Physique [physics], Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2005, [https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00011490/file/MANUSCRIT\\_2.PDF](https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00011490/file/MANUSCRIT_2.PDF)
- Magalie Buguet, *Activité d'éclairs et paramètres physiques issus de l'observation radar dans les orages : application au projet HyMeX*, Océan, Atmosphère. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2012, [https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00761486/file/These\\_BUGUET.pdf](https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00761486/file/These_BUGUET.pdf)
- A.A Tsonis et J.B Elsener, *Fractal Characterization and Simulation of Lightning*, Department of geological and geophysical sciences, University of Wisconsin-Milwaukee, 1986 [https://people.uwm.edu/aatsonis/files/2016/11/1987-05\\_Tsonis-AA\\_FractalCharacterizationandSimulationofLightning-u4a42z.pdf](https://people.uwm.edu/aatsonis/files/2016/11/1987-05_Tsonis-AA_FractalCharacterizationandSimulationofLightning-u4a42z.pdf)
- E.R Mansell, D.R MacGorman, C.L Ziegler, J.M Straka, *Simulated three-dimensional branched lightning in a numerical thunderstorm model*, JOURNAL OF GEOPHYSICAL RESEARCH, VOL. 107, NO. D9, 10.1029/2000JD000244, <https://pdfs.semanticscholar.org/7a0c/e0a26334fba85d17b927a1acad2264bf886c.pdf>