

22^{ème} Olympiades de Physique

30 et 31 Janvier 2015

Résonnons avec le bol tibétain



Hélène de Lachaux

Sara Lasagni

Félicie Levinton

Thaïs Masseï

École Alsacienne Paris VI^{ème}

AVANT-PROPOS	3
INTRODUCTION	3
1. CARACTERISATION DES BOLS	4
1.1 COMPARAISON AVEC LES VERRES A VIN	4
ONDES STATIONNAIRES	4
1.2 CARACTERISATION DES BOLS	4
MESURAGES	4
TABLEAU RECAPITULATIF	7
2. PROPRIETES ACOUSTIQUES ET SONORES	8
2.1 LE SON ET LA FREQUENCE DE RESONANCE	8
2.2 EXCITATION DU BOL	8
2.3 PROTOCOLE	8
2.4 RELATION AVEC LE CYLINDRE	9
3. ÉTUDE PLUS COMPLETE DES PROPRIETES ACOUSTIQUES	11
3.1 LES DIFFERENTS MODES	11
3.2 EXPRESSION DE LA FREQUENCE DE F_N	13
3.3 LE MODULE DE YOUNG	13
4. LES BATTEMENTS	15
4.1 LA MAILLOCHE	15
LE MOUVEMENT DE LA MAILLOCHE	16
L'INFLUENCE DE LA MAILLOCHE SUR LES BOLS TIBETAINS	16
4.2 LA DISSYMETRIE	17
ÉTUDE DE LA DISSYMETRIE AVEC LES VERRES A VIN	17
INFLUENCE DE LA DISSYMETRIE SUR LES BOLS TIBETAINS	18
4.3 RELATION ENTRE LES BATTEMENTS ET LES MODES	19
CONCLUSION	22
REMERCIEMENTS	22
BIBLIOGRAPHIE	23

Avant-propos

À la lecture de ce mémoire vous trouverez l'analyse physique et acoustique détaillée d'un instrument de musique ancestral, peu connu, dont l'esthétisme et la dimension spirituelle ne peuvent laisser indifférent. Les bols tibétains, instruments frappés ou frottés à l'aide d'une mailloche en bois sont caractérisés par leur forme et leurs propriétés acoustiques diverses qui rendent leur son unique et envoûtant.

Instruments dont la forme est comparable à un cylindre et dont la mise en vibration est semblable à celle des verres de cristal, les bols tibétains possèdent un son complexe dont on peut tirer une palette de notes à condition de savoir en jouer. Dans le but de répertorier les propriétés acoustiques des bols, nous avons composé un orchestre de sept bols de taille, forme, épaisseur, fréquence différentes afin de les confronter lors d'expériences et de voir l'influence de ces paramètres sur le mode de résonance associé à sa fréquence de résonance. Enfin, ces bols ne ravissent pas seulement les oreilles mais également les yeux car seule la présence d'eau lors de la mise en vibration suffirait presque à nous laisser croire à une "lévitation".

Nous nous proposons donc de réaliser une caractérisation physique et sonore des bols tibétains avant de réaliser une étude approfondie des propriétés acoustiques et notamment des modes de résonance caractéristiques du système de vibration de ces instruments.

Introduction

Nous avons découvert le bol tibétain, pour la première fois, en observant un phénomène singulier qui se produit lorsqu'on excite le bol alors qu'il est rempli d'eau. À ce moment là, la surface du liquide cesse d'être plane et des ondes apparaissent, suivies, si l'on continue à tourner la mailloche, de l'apparition de gouttelettes qui se détachent de la surface. Ce spectacle fait visuellement penser à une lévitation. C'est donc ce phénomène hydroacoustique, unique et étonnant, qui nous a amenées à nous pencher sur ces objets pour en comprendre les caractéristiques sonores.

Ainsi, le bol tibétain est un instrument ancestral sacré, reconnu depuis toujours pour le son incomparable et envoûtant qu'il produit. Ses origines sont pourtant incertaines. Il serait apparu au Vème siècle avant J-C, dans la région de l'Himalaya et au Népal. Traditionnellement, le bol tibétain est fabriqué dans ces régions ainsi qu'au Boutant, en Mongolie ou encore dans le Nord de l'Inde, en Chine et au Japon. De nos jours, la plupart proviennent de la vallée de Katmandu à l'Est du Népal.

Actuellement, les médecins tibétains et de nombreux thérapeutes occidentaux utilisent ces bols chantants, entièrement faits à la main, lors de séances d'harmonisation des chakras (les centres spirituels ou énergétiques localisés dans notre corps), de prières ou de méditation. On l'écoute également au cours de cérémonies d'offrandes et de rituels bouddhiques en Chine continentale, à Taiwan, au Japon et au Vietnam.

Selon la tradition, le bol est fabriqué de sept métaux se rapportant à sept chakras différents ou à sept astres. On l'excite à l'aide d'un bâton de bois, appelé mailloche, éventuellement recouverte de feutre ou de cuir que l'on frotte autour des parois extérieures du bol.

Nos recherches nous ont d'abord conduites, suite à une caractérisation complète d'un ensemble de sept bols tibétains, à analyser leurs propriétés acoustiques et vibratoires. Puis, nous avons étudié les différents facteurs pouvant influencer sur le son de ces bols, source de leur originalité sonore.

1. Caractérisation des bols

1.1 Comparaison avec les verres à vin

On peut comparer le comportement des bols tibétains à celui des verres en cristal. En effet, frotter son doigt mouillé sur le bord du verre revient à frotter les parois du bol avec une mailloche. Les deux instruments émettent alors un son continu.

Ondes stationnaires

Les ondes qui apparaissent dans les verres à vin sont des ondes stationnaires. Les ondes stationnaires sont la résultante de deux ondes progressives, de même amplitude, même direction mais de sens de propagation contraires. Lorsque la mailloche entre en contact avec les parois du bol, deux ondes de sens opposés se forment.

Lorsqu'un bol est rempli d'eau, il est possible d'observer à la surface du liquide des points qui semblent fixes à tout instant et des points vibrant avec une grande amplitude. Ces observations sont caractéristiques de la présence d'ondes stationnaires.

Suivant le modèle mathématique des ondes progressives sinusoïdales, nous avons démontré théoriquement l'existence de points fixes et de points vibrant avec une amplitude maximale. (Voir annexe)

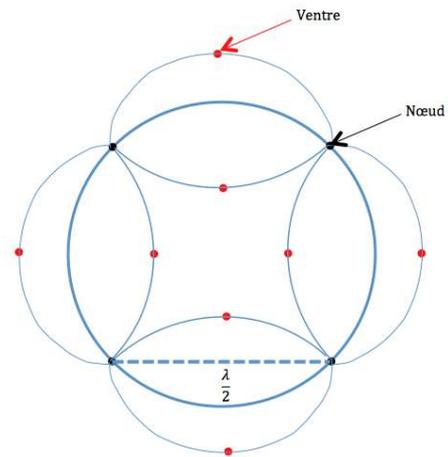


Figure 1 - Schéma des ondes stationnaires

1.2 Caractérisation des bols

Mesurages

Notre étude porte sur sept bols tibétains dont nous avons dégagé les caractéristiques essentielles : la masse, le diamètre, la hauteur, l'épaisseur moyenne et le volume. Les quatre premières caractéristiques ont été relativement simples à déterminer. Pour la masse nous avons utilisé une balance au gramme près. Pour le diamètre et l'épaisseur nous avons utilisé une règle graduée au millimètre. Enfin, un pied à coulisse gradué à deux centièmes de millimètre nous a permis de déterminer l'épaisseur moyenne de la paroi des différents bols.

Par ailleurs, nous avons rencontré quelques difficultés pour mesurer le volume des bols. Dans un premier temps, nous avons expérimenté la démarche suivante : elle consiste à déterminer tout d'abord, le volume V_{vide} d'eau contenu dans un cristallisoir vide ; ensuite, on mesure le volume V d'eau que peut contenir le cristallisoir une fois le bol tibétain placé à l'intérieur. Enfin, par soustraction de V à V_{vide} , on calcule le volume V_{bol} du bol tibétain.

Nous avons donc suivi le protocole suivant :

- On crée une réserve d'eau (qui nous servira pour la suite du mesurage) dans laquelle on ajoute quelques gouttes de produit vaisselle afin de réduire la tension superficielle et augmenter la viscosité de l'eau.
- À l'aide d'une éprouvette graduée de 50 mL, on commence à remplir un cristallisoir d'eau.
- Lorsque le volume restant contenu par le cristallisoir n'est plus suffisant pour accueillir cinquante autres millilitres d'eau, on poursuit la manipulation avec une burette graduée de 25mL, de classe A.

- Enfin, on procède à un « goutte à goutte » à l'aide de la burette afin de déterminer le plus précisément possible le volume contenu par le cristalliseur. Pour cela, on cherche le volume d'eau à partir duquel le liquide commence à déborder d'une goutte.
- En additionnant les différents volumes, on calcule le volume V_{vide} contenu par le cristalliseur.
- On recommence ensuite la même manipulation mais cette fois ci avec le bol tibétain placé dans le cristalliseur. On détermine ainsi le volume V .
- On calcule alors le volume V_{bol} en soustrayant V à V_{vide} .

Nous avons suivi cette démarche à plusieurs reprises, effectuant le mesurage plusieurs fois pour chaque bol. Cependant, les résultats n'étaient pas concluants. Pour un même bol nous avons trouvé des résultats très différents : par exemple pour le bol F, l'écart relatif entre les valeurs trouvées était de 41%. En effet, les sources d'incertitudes sur le mesurage sont multiples : il y a tout d'abord les incertitudes systématiques, dues aux instruments, mais aussi à la tension superficielle du liquide ainsi que les incertitudes aléatoires, liées aux lectures de ménisques.

Pour faire face à ces difficultés, nous avons élaboré une méthode différente afin de déterminer le volume des bols. Nous avons pour cela fait l'acquisition d'un dynamomètre électronique, modèle *Kern HDB 5K5N*, qui nous a permis de calculer le volume en utilisant la poussée d'Archimède.

Nous avons dans un premier temps fixé le dynamomètre de façon à pouvoir suspendre à l'aide d'un fil le bol tibétain à l'appareil. Après avoir relevé le poids P_{air} du bol dans l'air, nous avons plongé le bol toujours suspendu au dynamomètre dans un seau rempli d'eau en s'assurant qu'il n'y ait pas de bulle d'air. Le dynamomètre affiche le poids P_{eau} du bol dans l'eau. Les valeurs obtenues sont différentes pour P_{air} et pour P_{eau} . Cela est dû au fait que le bilan des forces appliquées au bol est différent dans les deux situations. En effet on a :

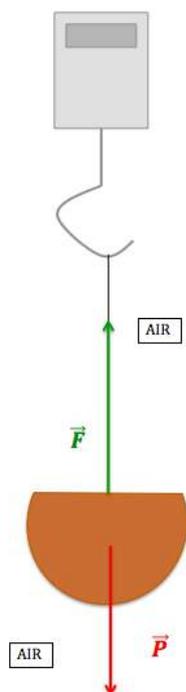


Figure - 2 - Bilan des forces dans l'air

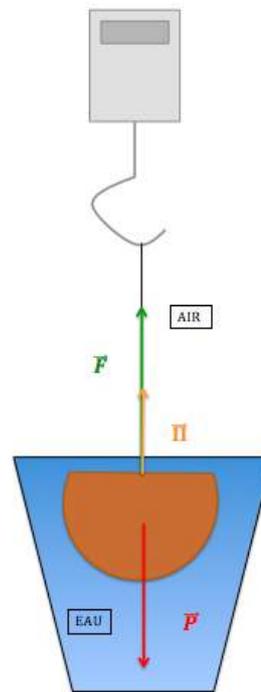


Figure 3 - Bilan des forces dans l'eau

Dans les deux situations, le système {bol tibétain} est soumis à la force de son poids \vec{P} et à la force \vec{F} exercée par le dynamomètre sur le bol. Cependant, on remarque que dans la deuxième

situation, celle dans l'eau, une force supplémentaire apparaît : la poussée d'Archimède (la poussée d'Archimède est égale au poids du fluide déplacé). Donc

$$\Pi = P_{air} - P_{eau}$$

À l'aide de cette formule, on calcule la poussée d'Archimède exercée par le fluide sur le bol.

Or on sait que :

$$\Pi = \text{poids du volume de fluide déplacé} = P_{air} - P_{eau} = \rho_{fluide} \cdot V_{immergé} \cdot g$$

On sait que $\rho_{eau} = 998,06 \text{ kg.m}^{-3}$ et $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ on a donc :

$$V_{bol} = \frac{\Pi}{\rho_{fluide} \cdot g}$$

À l'aide de cette relation, nous avons pu déterminer le volume de chaque bol tibétain.

Pour finir la caractérisation des différents bols, connaissant leur volume et leur masse, nous avons calculé la masse volumique de l'alliage à l'aide de la relation suivante :

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Pour le bol E par exemple, nous avons trouvé à l'aide du dynamomètre les valeurs suivantes :

$$P_{air} = 9,80 \text{ N} \text{ et } P_{eau} = 8,70 \text{ N}$$

On calcule alors la poussée d'Archimède.

$$\Pi_E = P_{air} - P_{eau} = 9,80 - 8,70 = 1,10 \text{ N}$$

Ainsi, le volume V_E du bol est donné par la relation suivante :

$$V_E = \frac{\Pi_E}{\rho_{eau} \cdot g} = \frac{1,10}{998,06 \cdot 9,81} = 1,12 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

Nous avons, suite à notre mesurage, cherché à déterminer l'incertitude absolue sur le volume. Pour cela, nous avons réalisé une étude statistique sur le dynamomètre : le mesurage de P_{air} et de P_{eau} a été effectué dix fois pour un même bol.

Grâce à la formule suivante, on peut calculer l'incertitude type sur la mesure du poids :

$$u(P) = \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$$

Avec σ_{n-1} , l'écart type et n, le nombre de mesures effectuées soit $n = 10$.

Seule l'incertitude aléatoire a pu être considérée car la tolérance du dynamomètre électronique n'était pas indiquée par le fabricant.

Par propagation des incertitudes, on obtient l'incertitude type sur la poussée d'Archimède :

$$u(\Pi) = \sqrt{2 \cdot u(P)^2} = u(P)\sqrt{2}$$

Les mesures du poids ont été effectuées dix fois de suite, soit $n = 10$. Ainsi, le coefficient de Student permettant de calculer l'incertitude absolue sur la poussée d'Archimède pour un niveau de confiance de 95% est 2,26.

$$U(\Pi) = 2,26 \cdot u(P)\sqrt{2}$$

Le volume d'un bol a été calculé à l'aide de la formule $V_{bol} = \frac{\Pi}{\rho_{fluide} \cdot g}$. Ainsi, l'incertitude absolue sur le volume V_{bol} est due aux incertitudes sur la poussée d'Archimède mais aussi sur la masse volumique de l'eau et sur la pesanteur.

Considérons que $g = 9,81 \pm 0,005$ N. Pour la masse volumique de l'eau, l'incertitude vient surtout de la température de l'eau au moment de l'expérience. Nous nous sommes placées dans un intervalle de 5°C entre 19°C et 23°C. Ainsi, $\rho_{eau} = 998,06 \pm 0,41$ kg.m⁻³.

$$\frac{U(V_{bol})}{V_{bol}} = \left(\left(\frac{U(\Pi)}{\Pi} \right)^2 + \left(\frac{U(\rho)}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{U(g)}{g} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0,11$$

On a donc 11% d'incertitude relative sur la valeur expérimentale du volume d'un bol. On peut alors calculer l'incertitude sur la masse volumique, par propagation des incertitudes :

$$U(\rho) = \rho \cdot \left(\left(\frac{U(m)}{m} \right)^2 + \left(\frac{U(V)}{V} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Ainsi, nous avons pu calculer l'incertitude obtenue sur la masse volumique de chaque bol reportée dans le tableau 1.

Tableau récapitulatif

À la suite de tous nos mesurages, et pour faciliter l'utilisation des mesures dans l'étude des bols, nous avons rassemblé toutes les caractéristiques mesurées dans un tableau.

Bol	Masse (g) <i>m</i>	Diamètre (cm) <i>D</i>	Hauteur (cm) <i>H</i>	Épaisseur moyenne (mm) <i>a</i>	Volume (m ³) <i>V</i>	Masse volumique (kg.m ⁻³) <i>ρ</i>	U(V _{bol}) (m ³)	U(ρ) (kg. m ⁻³)
A	510	12,8	7,0	2,53	6,1.10 ⁻⁴	8,4.10 ³	7.10 ⁻⁵	9.10 ²
B	529	13,3	6,8	3,39	4,5.10 ⁻⁴	12.10 ³	5.10 ⁻⁵	1.10 ³
C	602	17,1	5,7	5,78	6,5.10 ⁻⁴	9,2.10 ³	7.10 ⁻⁵	9.10 ²
D	282	9,1	5,3	2,55	3,0.10 ⁻⁴	9,4.10 ³	3.10 ⁻⁵	9.10 ²
E	999	17,6	9,5	3,68	1,1.10 ⁻⁴	9,1.10 ³	1.10 ⁻⁵	8.10 ²
F	535	13,4	7,2	3,52	6,0.10 ⁻⁴	8,9.10 ³	7.10 ⁻⁵	1.10 ³
G	545	12,5	7,8	3,4	5,5.10 ⁻⁴	9,9.10 ³	6.10 ⁻⁵	1.10 ³

Tableau 1 - Caractérisation des bols

2. Propriétés acoustiques et sonores

2.1 Le son et la fréquence de résonance

Le bol tibétain est un véritable instrument de musique, dont nous avons étudié les propriétés acoustiques.

Le son est une onde, c'est-à-dire une perturbation de la matière par transfert d'énergie. En se propageant dans l'espace, le son est à l'origine de mouvements mécaniques de l'air. On parle de phénomène périodique car la perturbation de la matière se reproduit à l'identique et à intervalle de temps régulier. L'onde sonore se déplace dans toutes les directions de l'espace, elle est tridimensionnelle, mais aussi longitudinale car elle provoque une perturbation dans une direction parallèle à sa propagation.

Une onde sonore est caractérisée par trois paramètres :

- sa célérité, c en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$;
- sa fréquence f en Hz, qui correspond au nombre d'oscillations complètes effectuées en une seconde ;
- sa longueur d'onde λ en m, qui correspond à la plus petite distance séparant deux points du milieu vibrant en phase.

Pour qu'un son soit créé, il faut un dispositif composé d'un système mécanique vibrant et d'une structure résonante. Ainsi, en vibrant, le bol tibétain émet un son caractérisé par sa fréquence de résonance f . Celle-ci est la hauteur du son perçu.

Comme tout signal périodique, un son de fréquence f peut être décomposé en une somme de signaux sinusoïdaux de fréquence f ; $2f$; $3f$; $4f$... La fréquence f est la fondamentale. Les fréquences $f_n = n.f$ sont les harmoniques.

2.2 Excitation du bol

La technique de mise en vibration des bols chantants est similaire à celle utilisée avec les verres à vin. Frapper d'un coup de *mailloche* les parois d'un bol tibétain revient à frapper un verre de cristal avec une cuillère. De même, frotter la mailloche aux parois du bol relève du même phénomène que de passer son doigt mouillé sur le bord d'un verre en cristal.

Nous avons pris contact avec Denis Terwagne, chercheur à l'Université Libre de Bruxelles qui a travaillé sur le bol tibétain dans le cadre d'une thèse avec le MIT afin d'obtenir plus de précisions sur l'interaction entre la mailloche et la paroi du bol. Ce phénomène appelé *stick-slip* est comparable à l'action de l'archet sur une corde de violon. Même s'il semble fluide, le mouvement de la *mailloche* autour du bol est composé d'une succession de petits cisaillements. Au contact de la *mailloche*, les parois du bol sont entraînées par cette dernière. Quand la force exercée par la *mailloche* sur les parois est trop forte, la paroi déformée se décroche de la *mailloche* et tente de retrouver sa position d'équilibre en vibrant.

Grâce à ce phénomène, il est possible de mettre en évidence une déformation horizontale due à la forme cylindrique du bol.

2.3 Protocole

Afin de définir la fréquence de résonance du son émis par chaque bol, nous avons suivi le protocole suivant :

- On enregistre, à l'aide d'un micro le son du bol pendant une durée d'environ 5s. Il s'agit d'éviter au maximum les bruits parasites, tels que les heurts de la mailloche.

- On importe ensuite le fichier sur le logiciel *Acquisonic*, qui nous permet de visualiser le signal sonore. (figure 4 en annexe)
- Pour étudier le signal, on en sélectionne une partie.

Il est nécessaire de prendre un temps suffisamment long pour une meilleure résolution, et donc une plus grande précision. Cependant, il est important de noter que lorsque la résolution est élevée, l'intervalle de recherche de pics de fréquences est réduit. Nous avons choisi en moyenne une résolution de 5 Hz. Les fréquences les plus hautes étant celles qui se dissipent le plus rapidement, il est nécessaire de choisir une partie du début du signal.

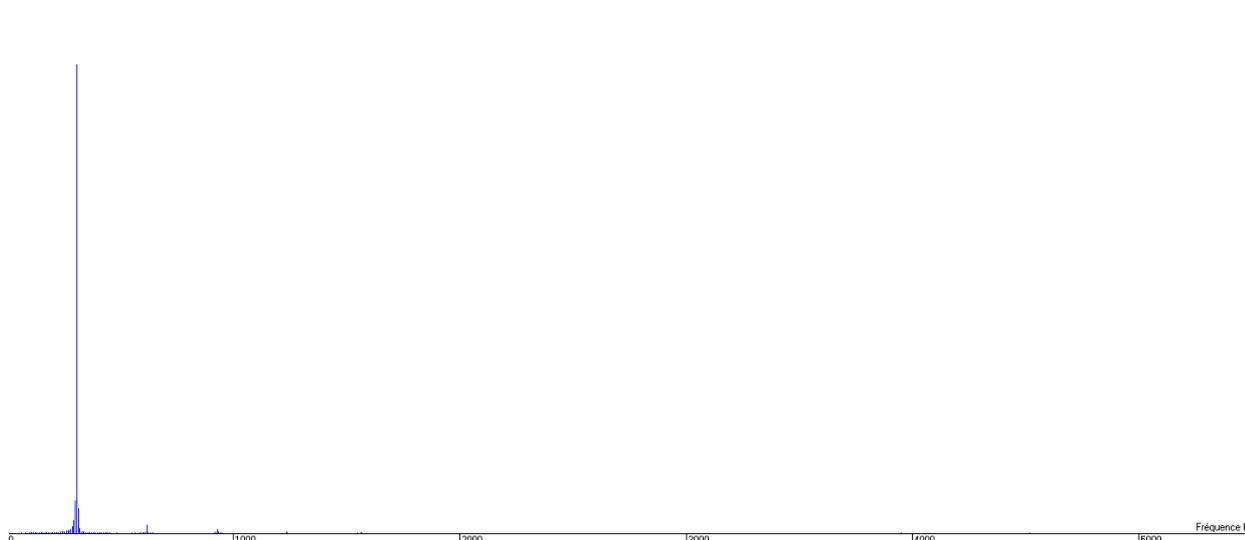


Figure 5 - Spectre de Fourier Bol A Frotté

La transformée de Fourier est une opération qui permet d'obtenir le spectre de fréquence du son. En effet, tout signal (ou son) périodique peut se représenter comme une superposition de sons purs, sachant qu'un son pur correspond à une onde sinusoïdale dont la fréquence et l'amplitude maximale sont constantes au cours du temps. La Transformée de Fourier proposée par le logiciel *Acquisonic* nous a ainsi permis de déterminer la fréquence de résonance du bol. On remarque également la présence de plusieurs pics : la fréquence la plus faible est la fondamentale tandis que les autres pics correspondent aux harmoniques.

Nous avons suivi cette démarche à plusieurs reprises pour chaque bol, en les frottant à l'aide d'une mailloche. Les valeurs sont reportées dans le tableau en annexe. (Tableau 2. Fréquences des différents bols)

2.4 Relation avec le cylindre

Pour faciliter l'étude du bol tibétain, nous avons choisi de commencer avec une analyse simplifiée. Compte tenu de la forme circulaire du bol, de sa base solide et de son ouverture, il est possible de considérer que le bol tibétain est cylindrique. Le bol tibétain étant d'une faible hauteur, la variation du diamètre entre la base et le sommet de ses parois est réduite. Le diamètre du bol est constant et ses parois sont orthogonales à la base.

On considère les grandeurs suivantes :

- a , l'épaisseur des parois ;
- H , la hauteur du cylindre ;

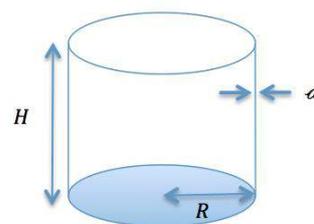


Figure 6 - Schéma d'un cylindre

- R , son rayon.

Lorsque le solide est un cylindre, il existe en première approximation la relation de proportionnalité suivante :

$$f \propto \frac{a}{R^2}$$

Pour justifier notre modélisation, il convient de faire l'étude graphique de $f = f\left(\frac{a}{R^2}\right)$ ce qui revient à exprimer la fréquence f en fonction de a/R^2 . Le fait d'assimiler le bol tibétain à un cylindre ne peut être confirmé qu'en trouvant une relation de proportionnalité entre f et a/R^2

Nous avons alors réalisé cette étude graphique pour tous les bols que nous possédons. (Figure 7 en annexe).

On remarque que les points des bols A, B, D, E et F sont alignés. En effet, on peut faire une régression linéaire à partir de ces cinq points. Le coefficient de corrélation $R^2=0,9956$ donc $R^2 \geq 0,95$; le modèle est justifié.

Cependant, les bols C et G ont un comportement différent, et ne peuvent être assimilés à des cylindres.

Cette courbe permet de légitimer notre modélisation pour 5 des sept bols. Ainsi, le bol tibétain dans certains cas peut être assimilé à un cylindre afin de faciliter son analyse acoustique.

Lorsque l'épaisseur des parois augmente, la fréquence du bol tibétain augmente. Au contraire, lorsque la longueur du rayon augmente, la fréquence f diminue.

3. Étude plus complète des propriétés acoustiques

3.1 Les différents modes

L'étude précédente a montré qu'en frottant un bol tibétain avec une *mailloche* on obtient un son composé d'une fondamentale et d'harmoniques, proportionnelles entre elles.

Nous avons par la suite suivi la même démarche mais cette fois-ci en frappant le bol afin de déterminer si le mode d'excitation avait une influence sur le son émis par le bol.

Grâce à la transformée de Fourier, on peut étudier le spectre de fréquences d'un bol frappé. (figure 8 en annexe)

Le spectre de fréquence de chaque bol frappé n'a qu'une seule fréquence en commun avec le spectre du même bol frotté.

On remarque que les différentes fréquences obtenues ne varient pas en fonction de n . Pour vérifier l'invalidité la relation $f_n = n.f$ lorsque le bol est frappé, on a tracé, à l'aide du tableur Excel, la fonction $f_n = f(n)$. (cf Figure 9 en annexe)

On remarque que les courbes ne sont pas des droites. On en déduit que f_n ne varie pas de façon proportionnelle par rapport à n .

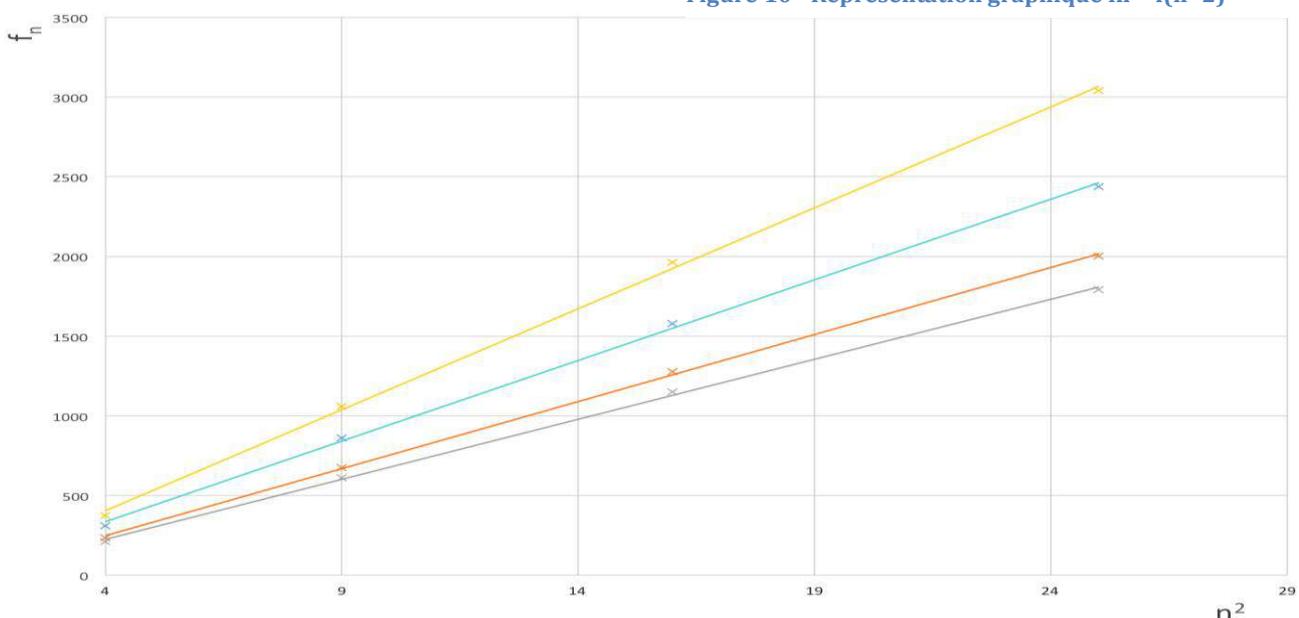
Or on sait que sur une corde on a la relation suivante : $\lambda = \frac{2L}{n}$ avec L , la longueur de la corde et $\lambda = \frac{c}{f}$ (avec c la célérité), la longueur d'onde. Dans le cas du bol tibétain, la distance $2L$ est remplacée par $2\pi R$ du fait de la circularité du bol. On a donc $\lambda = \frac{2\pi R}{n}$. De plus, dans un cylindre la célérité c des ondes de flexion varie comme \sqrt{f} : $c = k \times \sqrt{f}$. Cela nous permet donc de poser l'égalité suivante :

$$\frac{2\pi R}{n} = \frac{c}{f} \Leftrightarrow \frac{2\pi R}{n} = \frac{k\sqrt{f}}{f} \Leftrightarrow \frac{f}{k\sqrt{f}} = \frac{n}{2\pi R} \Leftrightarrow f = \frac{n^2 k^2}{4\pi^2 R^2}$$

On a donc $f = \frac{n^2 k^2}{4\pi^2 R^2}$, ce qui implique f proportionnel à n^2 . Les fréquences varient donc en n^2 avec $n \geq 2$ et $n \in \mathbb{N}$.

Pour valider notre hypothèse selon laquelle f_n varie selon n^2 , nous traçons toujours à l'aide d'Excel, $f_n = f(n^2)$.

Figure 10 - Représentation graphique $f_n = f(n^2)$



On obtient des droites, notre hypothèse est validée.

Lorsqu'on frappe un bol on observe des modes de Rayleigh : en frottant le bol, on excite un seul mode, le mode naturel du bol, tandis que lorsque le bol est frappé, tous les modes sont excités.

On peut associer à chaque fréquence du spectre du bol frappé un mode n , avec f_n la fréquence correspondant au mode n .

Nous avons pu déterminer le mode naturel de vibration de chaque bol en comparant la fréquence fondamentale de celui-ci avec les fréquences des modes. Ainsi, les bols A, B, D, E et F vibrent au mode 2 tandis que les bols C et G vibrent au mode 3.

Nous avons cherché à mettre en évidence les modes de déformation des différents bols afin de montrer le nombre de nœuds et de ventres. Pour cela nous avons utilisé un dispositif permettant d'observer les ondes stationnaires.

Si un bol tibétain rempli de fluide rentre en vibration, des ondes stationnaires apparaissent à la surface du fluide. Nous les avons d'abord observées en remplissant le bol d'eau et en l'excitant à l'aide de la *mailloche*. Cependant, il était très difficile de voir les ondes à la surface de l'eau. Nous avons eu l'idée de remplacer l'eau par du lait et d'y ajouter un peu de poivre avant d'exciter le bol en le frottant. La forme prise par le fluide suggère alors le nombre de nœuds et de ventres.

Lorsqu'un bol rempli de fluide est excité, on peut observer à l'œil nu sur la surface du liquide, les ondes stationnaires. On remarque que les nœuds et les ventres sont symétriques par rapport à l'axe de symétrie du bol et leur orbite elliptique. Ainsi ce sont les modes de Rayleigh qui caractérisent le nombre de nœuds et de ventres : au mode n , il y a $2n$ ventres et autant de nœuds. Par exemple, au mode 2, on compte 4 nœuds et 4 ventres.



Photo 1 - Comportement du fluide dans le bol

Sur la photo (*photo1*), on observe un hexagone ; on peut donc émettre l'hypothèse que le bol C vibre au mode 3.

Nous avons par la suite adapté l'expérience de Franz Melde au cas du bol tibétain. Il étudiait les ondes stationnaires produites sur une corde tendue reliée à un vibreur électrique.

Ainsi, dans la situation du bol tibétain, l'objectif est de mettre en évidence la présence des nœuds et des ventres caractéristiques de ces interférences.

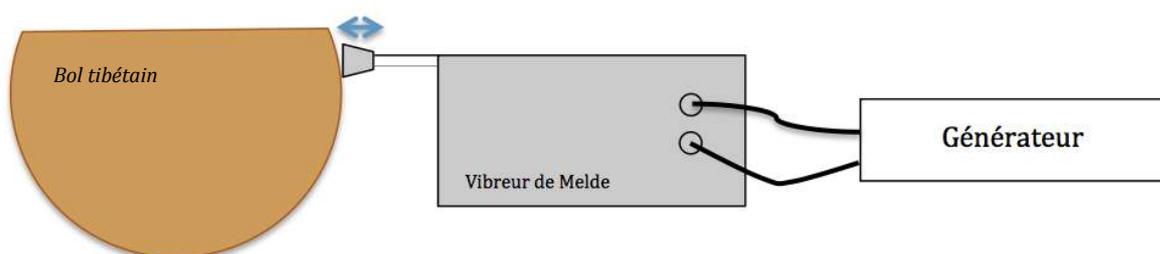


Figure 11 - Schéma de l'expérience avec le vibreur de Melde

Le vibreur de Melde, alimenté par le générateur vient frapper, à intervalles de temps réguliers plus ou moins importants selon la fréquence, les parois du système. Il remplace donc la *mailloche* dans la mise en vibration de l'objet. En effet, cette dernière, par sa rotation autour du bol nous empêchait de voir distinctement les nœuds et les ventres.

Excité à sa fréquence de résonance, le bol rentre en vibration et émet des ondes mécaniques de même direction et de sens opposés. De ces ondes mécaniques résulte la formation d'une onde stationnaire entraînant une perturbation du milieu.

Afin de pouvoir observer cette perturbation se manifestant par les nœuds et les ventres nous avons rempli le bol étudié au deux tiers de lait saupoudré de poivre.

Après quelques secondes, différentes figures, dont le nombre semble varier d'un bol à l'autre, apparaissent. Ces figures portent le nom de modes de résonance (*cf partie modes*). Entre chacune d'entre elles, un effet d'immobilité est visible.

Comme nous avons pu déterminer les fréquences de résonance des différents bols à l'aide du logiciel *Acquisonic*, l'expérience de Melde nous a permis de confirmer les fréquences fondamentales obtenues.

3.2 Expression de la fréquence de f_n

La fréquence dépend, entre autre, du nombre de nœuds horizontaux, n et des nœuds verticaux caractérisés par m , soit $f_{(n,m)}$.

$$f_{(n,m)} = \frac{1}{12\pi} \sqrt{\frac{3E}{\rho_s}} \frac{a}{R^2} \sqrt{\frac{(n^2 - 1)^2 + (mR/H)^4}{1 + \frac{1}{n^2}}}$$

Or au mode le plus bas, si on considère qu'il n'y a pas de cercles nodaux verticaux, on a $m=1,875$

$$\text{Donc } f_{(n,m)} = \frac{1}{12\pi} \sqrt{\frac{3E}{\rho_s}} \frac{a}{R^2} \sqrt{\frac{(n^2-1)^2 + 12(R/H)^4}{1 + \frac{1}{n^2}}}$$

3.3 Le module de Young

Le module de Young (E) correspond au module d'élasticité, c'est à dire la résistance intrinsèque d'un solide à une contrainte élastique. Il est défini par cette contrainte élastique par unité de déformation :

$$\text{Module de Young } E = \frac{\text{contrainte}}{\text{déformation}}$$

Chaque matériau est caractérisé par son module de Young. Ainsi, en calculant le module de Young des bols tibétains, on pourra voir s'ils sont cohérents avec les alliages dont les bols tibétains devraient être constitués.

On sait que :

$$f_{(n,m)} = \frac{1}{12\pi} \sqrt{\frac{3E}{\rho_s}} \frac{a}{R^2} \sqrt{\frac{(n^2 - 1)^2 + 12(R/H)^4}{1 + \frac{1}{n^2}}}$$

En étudiant $f_n^2 \frac{R^4}{a^2} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ en fonction de $(n^2 - 1)^2$, on obtient une fonction affine. En effet, on a

$$f_n^2 \frac{R^4}{a^2} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{48\pi^2} \frac{E}{\rho_s} (n^2 - 1)^2 + \frac{1}{4\pi^2} \frac{E}{\rho_s} \left(\frac{R}{H}\right)^4 \quad (1)$$

Cette fonction est affine, donc de la forme $f_n^2 \frac{R^4}{a^2} \left(1 + \frac{1}{48\pi^2}\right) = p(n^2 - 1)^2 + p'$ avec p la pente telle que $p = \frac{1}{48\pi^2} \frac{E}{\rho_s}$

$$\Leftrightarrow E = p \cdot \rho_s \cdot 48\pi^2$$

Comme la fonction est affine, sa courbe représentative est une droite dont nous pouvons exploiter la pente p par régression linéaire.

Avec le logiciel Excel, nous avons donc représenté cette relation pour chaque bol :

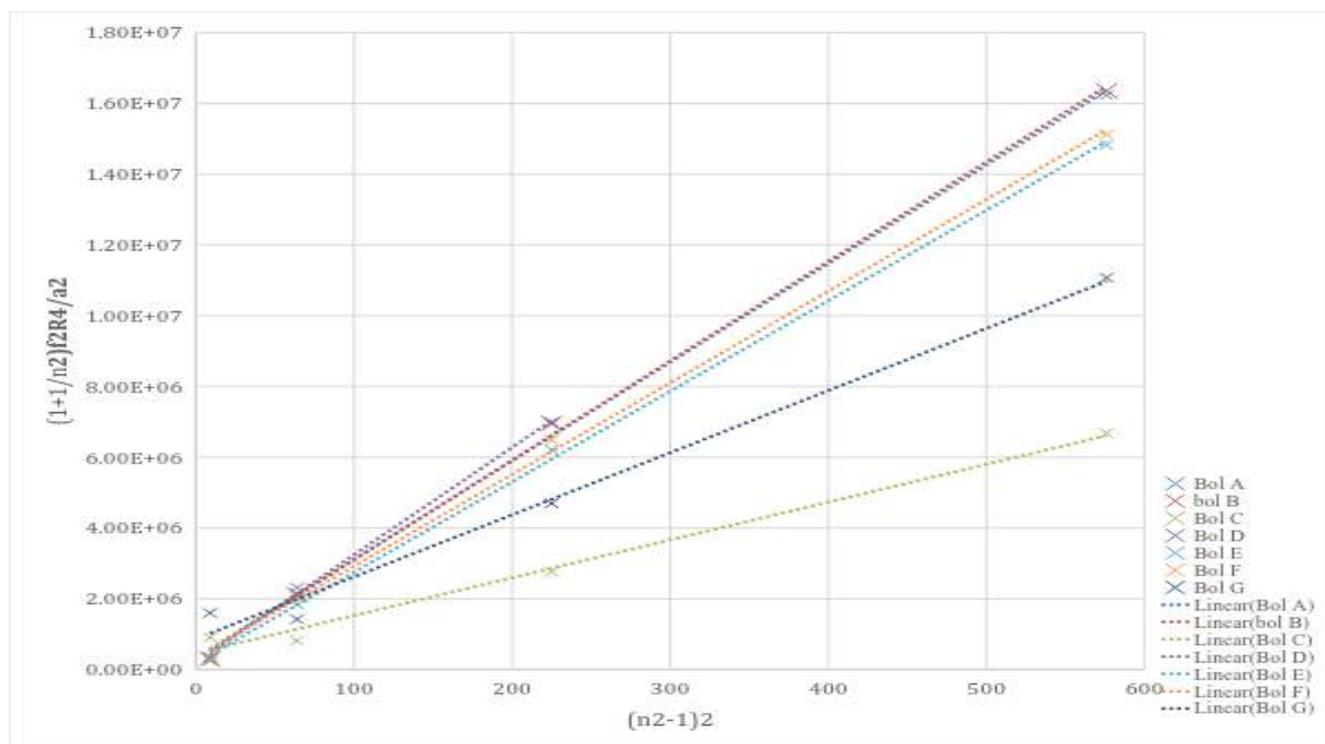


Figure 12 - Représentation graphique de la relation donnée

La valeur de la pente p obtenue par régression linéaire permet de calculer le module de Young. Nous avons refait la modélisation de $f_n^2 \frac{R^4}{a^2} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ en fonction de $(n^2 - 1)^2$ avec le logiciel *Regressi* car il permet de calculer l'incertitude sur la pente. Cela nous a donc permis d'estimer l'incertitude obtenue sur le module de Young des bols tibétains.

Pour le bol E, par exemple, la courbe *Regressi* se trouve en annexe (Figure 13 en annexe)

À partir de l'exploitation du modèle de cette représentation graphique, on cherche à calculer le module de Young E pour le bol considéré.

On sait que $E = p \cdot \rho \cdot 48\pi^2$

Donc on a $E = 1,0562056 \cdot 10^{11} \text{Pa}$

$$E = 1,06 \cdot 10^2 \text{GPa}$$

On peut alors calculer l'incertitude relative sur E à l'aide de la formule suivante :

$$\frac{U(E)}{E} = \left(\left(\frac{U(m)}{m} \right)^2 + \left(\frac{U(\rho)}{\rho} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

On obtient :

$$\frac{U(E)}{E} = 9,9\%$$

On peut alors écrire le résultat du module de Young sur le bol E :

$$E = (1,06 \pm 0,10) \cdot 10^2 \text{ GPa}$$

Chaque matériau est caractérisé par sa valeur du module de Young. Grâce aux valeurs tabulées on peut en déduire que le bol E est composé essentiellement de laiton. En effet, son module de Young est proche de 105 GPa. Aussi, le bol E contient en faible proportion du cuivre et du bronze.

Nous avons réuni dans un tableau les modules de Young calculés pour les différents bols et nos déductions quant aux métaux les composant.

Bols	Module de Young E (Gpa)	Incertitude relatives	Matériaux du bol
A	114	13	Laiton, cuivre, bronze
B	159	10	Bronze, fer, cuivre
C	51,9	11	
D	140	16	Cuivre, bronze, laiton
E	105	9,9	Laiton
F	113	13	Cuivre, laiton, bronze
G	79	11	Fer de fonte

Pour le bol C, nous avons obtenu la valeur $E = 51,9$ GPa. Ce module de Young correspond à la valeur du béton ou du verre. Ce résultat nous apparaît alors comme erroné car très peu probable. Le résultat obtenu pour le bol G indique qu'il pourrait être composé d'or ce qui nous semble encore une fois étonnant.

Les résultats des bols C et G montrent encore qu'une étude simplifiée de ces deux bols ne permet pas d'expliquer leur comportement.

4. Les battements

En enregistrant le son des bols tibétains avec le logiciel Synchronie nous avons observé la présence de battements dans le son. Ces battements ressemblent fortement à ceux visibles lorsqu'on met deux diapasons ayant des fréquences de résonance différentes en vibration simultanément. Ils sont le résultat de la superposition de deux ondes de fréquences voisines. En effet, ce phénomène est à l'origine d'une variation périodique de l'amplitude et explique l'apparition de battements dans le signal.

4.1 La mailloche

Nous nous sommes alors posé la question de l'origine de ces battements. Sont-ils dus au mouvement de la mailloche autour du bol ? Ou comme pour les diapasons, à la dissymétrie du bol ?

Le mouvement de la mailloche

Nous avons tout d'abord cherché à savoir si la mailloche était à l'origine des battements observés.

Si on considère la mailloche comme origine des battements, dès lors, lorsqu'on laisse le bol vibrer après avoir tourné, on ne devrait plus observer de battements.

Pour cela nous avons utilisé le logiciel *Synchronie 6* pour représenter le son émis par le bol tibétain. Le son est enregistré par un micro sous forme de tension et transmis au logiciel à l'aide d'une carte d'acquisition.

Nous avons suivi le protocole suivant :

- On excite un bol à l'aide d'une mailloche.
- On arrête de frotter le bol et on le laisse vibrer. Le bol continue alors d'émettre un son que l'on enregistre à l'aide du logiciel *Synchronie 6*.

On obtient alors le signal sonore suivant :

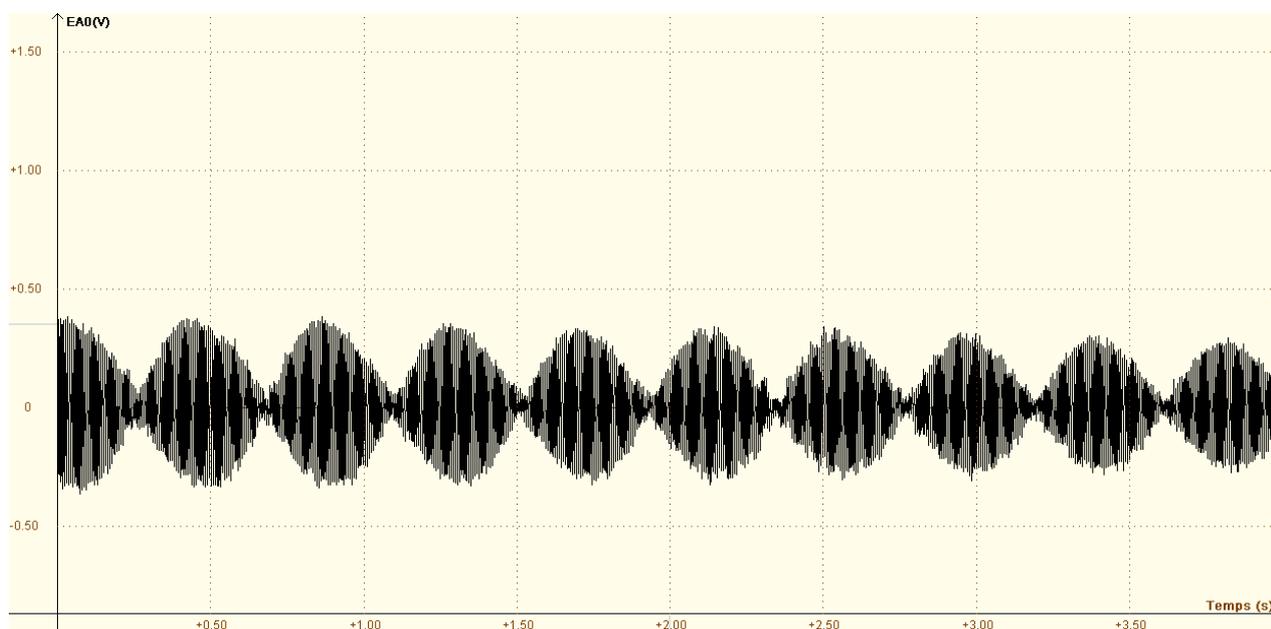


Figure 14 – Signal sonore du bol après l'arrêt de la mailloche

On peut remarquer des battements nets même lorsque la mailloche n'excite plus le bol. Nous avons pu en conclure que la mailloche n'était pas à l'origine des battements.

L'influence de la mailloche sur les bols tibétains

En enregistrant le son des bols tibétains avec le logiciel *Synchronie 6*, nous nous sommes aperçues que lorsque l'on tourne la mailloche autour du bol, la période des battements semblait varier. Or la vitesse de rotation de la mailloche, lorsqu'on excite le bol est loin d'être constante. La vitesse de la mailloche aurait-elle alors une influence sur les battements ?

Nous avons fait un premier test *grossier* pour évaluer préalablement si notre hypothèse semblait cohérente : à l'aide du logiciel *Synchronie*, nous avons enregistré le son d'un bol excité avec une mailloche dont on accélère puis décélère le mouvement, en faisant varier sa vitesse de rotation. Le graphique (figure 15 en annexe) révèle que lorsque la vitesse de rotation de la mailloche varie, la période T des battements varie également.

La vitesse de la mailloche aurait donc une influence sur les battements.

Les battements indépendants :

Cependant on observe des battements même lorsqu'on arrête de tourner la mailloche. La période de ces battements dépend-t-elle aussi de la vitesse de la mailloche ?

Pour avoir une vitesse de rotation régulière de la mailloche relativement au bol, le plus simple est de faire tourner le bol sur lui-même tandis que la mailloche reste stable. Pour cela, il nous fallait une surface équipée d'un plateau tournant à vitesse constante et d'un pied qui tienne la mailloche. La mailloche, positionnée de façon à être constamment en contact avec les parois du bol, aurait alors un mouvement rotatif par rapport à celui-ci.

Nous avons fait l'acquisition d'un tour de potier électrique. L'inconvénient de cet appareil est son moteur très sonore. En effet, nous n'avons pas pu obtenir d'enregistrement du son du bol sans le bruit parasite du moteur. Nous avons donc conçu un autre montage à plateau tournant dont l'explication de la fabrication se trouve en annexe.

Grâce au montage à plateau tournant, nous avons mis au point le protocole suivant :

- On met en vibration le bol tibétain.
- On commence un enregistrement et l'on arrête d'exciter le bol, mais il continue de résonner.

On répète alors cette manipulation avec les différentes vitesses permises par le batteur électrique. Pour toutes les vitesses, la période des battements est de 0,42s pour le bol E. Quel que soit la vitesse de rotation, la période, et ainsi la fréquence des battements observés lorsque l'on arrête d'exciter le bol est constante. Ainsi, lorsque le bol résonne sans être excité, il y a des battements indépendants de la vitesse de rotation de la mailloche, celle-ci étant à l'origine de la mise en vibration.

4.2 La dissymétrie

La mailloche n'étant donc pas à l'origine des battements observés, nous nous sommes intéressées à la dissymétrie des bols tibétains.

Étude de la dissymétrie avec les verres à vin

Pour mettre en évidence l'influence de la dissymétrie sur la présence de battements, il nous fallait un modèle de bol pouvant être considéré comme parfaitement symétrique. Nous avons décidé de faire la comparaison avec les verres à vin dont nous pouvons maîtriser la dissymétrie. Nous avons fait l'acquisition de deux verres à vins identiques ; nous en avons préservé un intact, donc « symétrique » et nous avons créé de la dissymétrie sur le second en le frappant ponctuellement avec un petit marteau. Le fait de déformer la paroi du bol permet d'entraîner une dissymétrie à l'échelle microscopique en modifiant les liaisons entre les atomes. Au passage de l'onde en ce point, son comportement devrait varier et modifier le signal sonore. Dans le verre à vin, le doigt joue le rôle de la mailloche.

Si la dissymétrie est à l'origine des battements alors nous ne devrions pas observer de battements dans le verre à vin symétrique.

Nous avons enregistré avec le logiciel *Synchronie 6* le son des deux verres, l'un après l'autre, lorsqu'on les excite avec le doigt et qu'on s'arrête pour les laisser résonner. On obtient alors le graphe suivant :

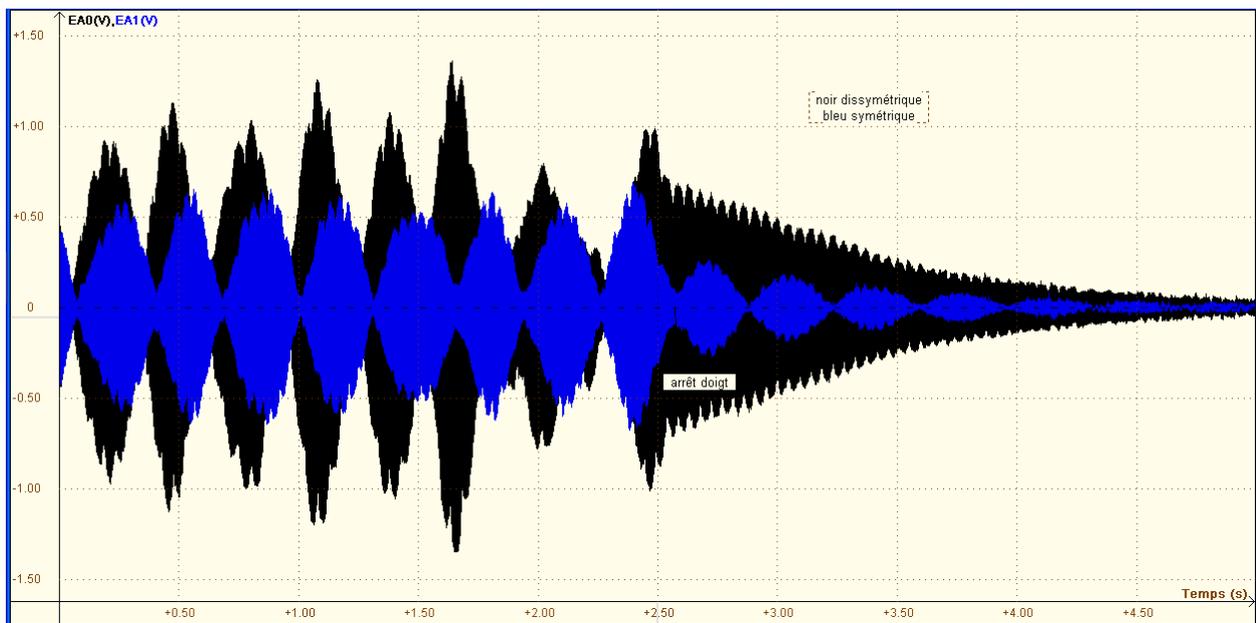


Figure 16 – Superposition des spectres (verres symétrique et déformé)

Ainsi on observe, comme le montre les deux spectres récapitulatifs ci-dessus, deux sortes de battements, qui se superposent dans le signal.

Le spectre bleu est celui du bol considéré comme symétrique. A 2,50s, on arrête de tourner le doigt autour du verre et on le laisse vibrer. On remarque alors que les battements sont toujours présents. On peut alors émettre l'hypothèse que dans les verres symétriques, les ondes stationnaires, entraînées par le doigt continue de se propager même lorsque le doigt ne tourne plus. Au contraire, dans le verre dissymétrique, on observe des battements différents lorsque qu'on tourne le doigt et lorsqu'on arrête.

Influence de la dissymétrie sur les bols tibétains

Nous avons montré précédemment que dans le son du bol, lorsque celui-ci résonne sans être excité par la mailloche, il y a des battements indépendants du mouvement rotatif. La dissymétrie a-t-elle une influence sur ces battements ?

Nous avons réalisé un enregistrement témoin d'un bol sans en accentuer sa dissymétrie à l'aide du logiciel *Synchronie 6* afin de déterminer la période "naturelle" de battements caractéristiques d'un bol. C'est-à-dire les battements présents, même après avoir arrêté de tourner. Pour cela, nous avons excité le bol jusqu'à ce que le son émis par ce dernier ait atteint une amplitude suffisamment grande pour qu'il puisse continuer à vibrer une fois que l'on arrête de l'exciter. Cela permet d'isoler le paramètre de la dissymétrie des autres paramètres pouvant influencer les battements et de comparer les battements en fonction uniquement de la dissymétrie du bol. Une fois le spectre du son obtenu, nous avons mesuré à l'aide de l'outil réticule du logiciel *Synchronie 6* la durée de plusieurs périodes afin de réduire les incertitudes sur la mesure de la période.

Pour accentuer la dissymétrie, nous avons d'abord placé une masselotte avec de la « Patafix » sur une des parois interne du bol mais cela empêchait le bol d'entrer en vibration. Nous avons choisi de réduire la taille de la masselotte tout en conservant sa masse. Cependant, on ne pouvait observer de différence sur la durée de la période d'un battement en faisant varier la position de la masselotte. Nous avons ensuite augmenté plus fortement la dissymétrie en incrustant des billes de plomb dans la « Patafix » à plusieurs reprises. Les résultats obtenus sont répertoriés dans le tableau suivant :

Masse de la masselotte	Durée d'une période T
0 g	0,42 s
10,04 g	0,38 s
18,27 g	0,36 s
24,10 g	0,33 s

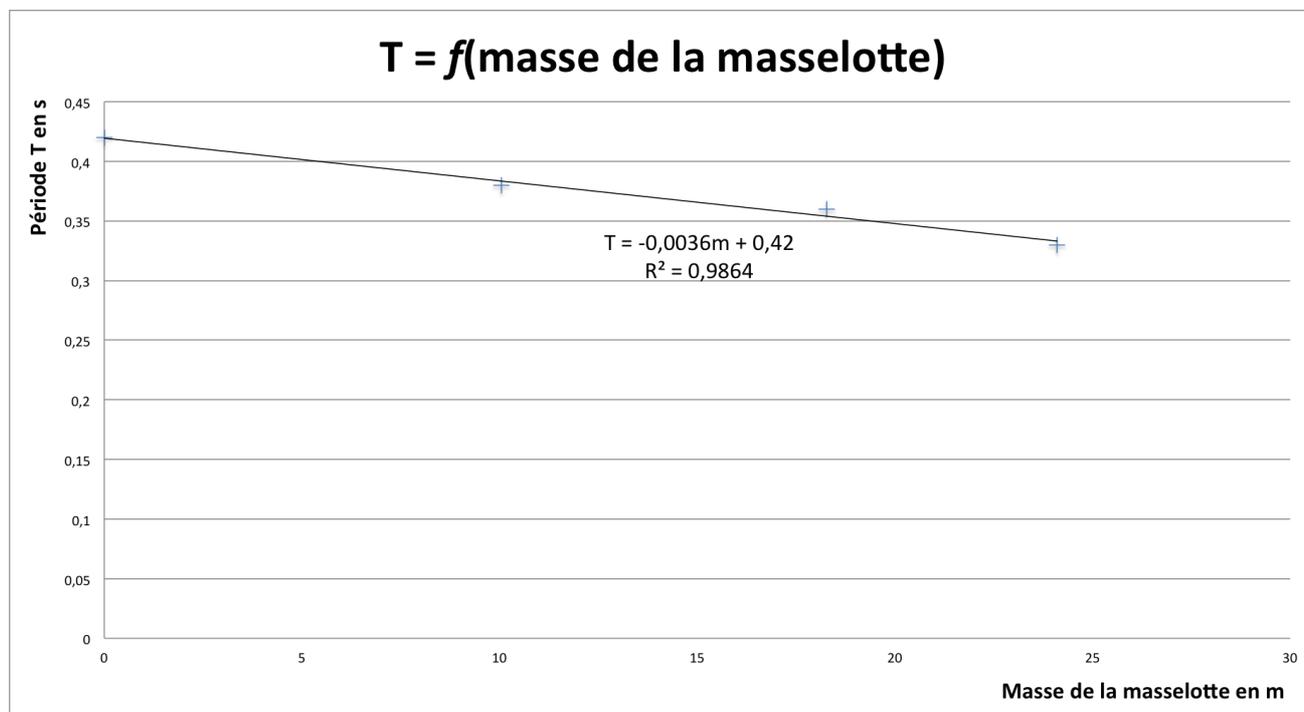


Figure 17 - courbe représentative de $T = f(m)$

Nous avons tracé le graphe représentant la période des battements en fonction de la masse de la masselotte. On obtient alors une droite, dont le coefficient directeur bien que faible traduit une relation entre la dissymétrie et les battements.

Ainsi, en augmentant la dissymétrie, on observe une faible augmentation de la fréquence des battements. La dissymétrie du bol a donc une influence sur son son.

4.3 Relation entre les battements et les modes

Etant donné, qu'il y a un rapport entre les battements et la mailloche, nous avons cherché à montrer le passage de la mailloche en un point.

Nous avons recherché un moyen expérimental permettant d'étudier le signal sonore émis par un bol tout en sachant à quel instant la *mailloche* avait réalisé un tour complet autour des parois. Il est alors nécessaire d'enregistrer un son et en parallèle de parvenir à signaler le passage de la *mailloche* en un point fixe du bol à chaque tour. L'objectif est de réussir à compter précisément le nombre de battements en un tour de *mailloche* pour voir s'il existe un lien entre les battements et le mode de vibration.

Nous avons dans un premier temps pensé à enregistrer le signal sonore émis par le bol tout en tapant sur la table proche du micro, à chaque fois que la *mailloche* passe devant le micro. Cependant, bien que les résultats nous permettent de deviner les différents modes, la pulsation était bien trop imprécise pour exploiter cette méthode.

Nous nous sommes alors tournés vers un autre dispositif, plus précis. Pour mettre en évidence le passage de la mailloche en un certain point P fixe du bol on utilise une diode photosensible et un laser. En positionnant le laser tangentiellement aux parois du bol, la mailloche coupe le signal lumineux en un certain point P . À ce moment précis, le laser n'atteint plus la photodiode, un message est alors transmis : la *mailloche* est passée au point P à l'instant t .

Nous avons donc mis au point l'expérience suivante :

- On branche un micro qui enregistre le son sous forme de tension grâce au logiciel Synchronie 6.
- Après avoir fixé le bol, on positionne tangentiellement le laser qui vise la photodiode.
- Nous avons réalisé le schéma électrique suivant, qui permet de transmettre l'information de la photodiode et de l'obtenir sous forme d'une hausse de tension. Ainsi, lorsque le laser est coupé, le circuit transmet une différence de potentiel.

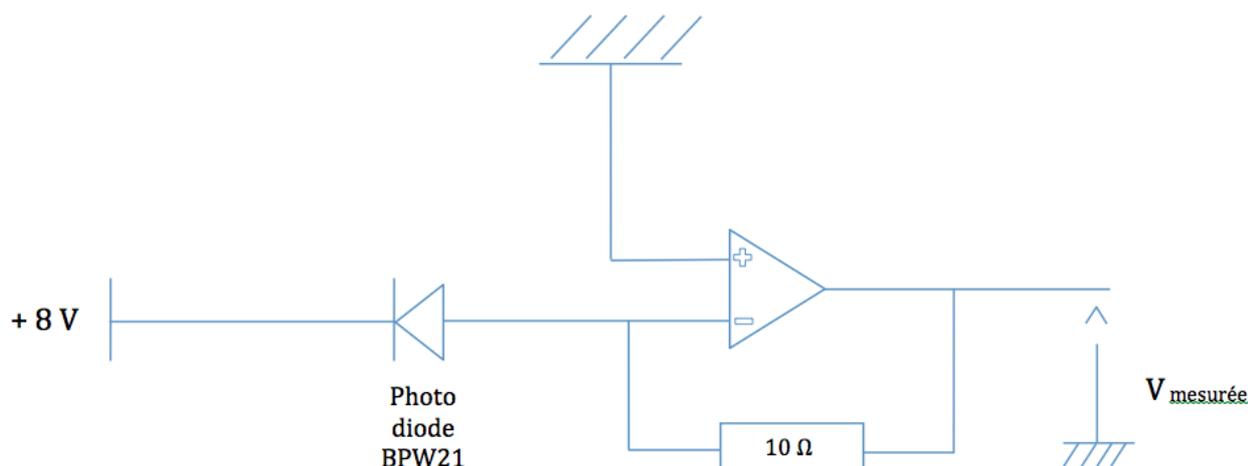


Figure 18 - Schéma électrique du montage

- On place le micro à environ 5cm du bol en face du point auquel la mailloche coupe de signal laser.
- Dans le noir, on frotte le bol avec la mailloche puis on enregistre. Le logiciel Synchronie 6, représente la tension du son en fonction du temps mais aussi la tension de la photodiode en fonction du temps.

On obtient comme graphique, par exemple pour le bol A :

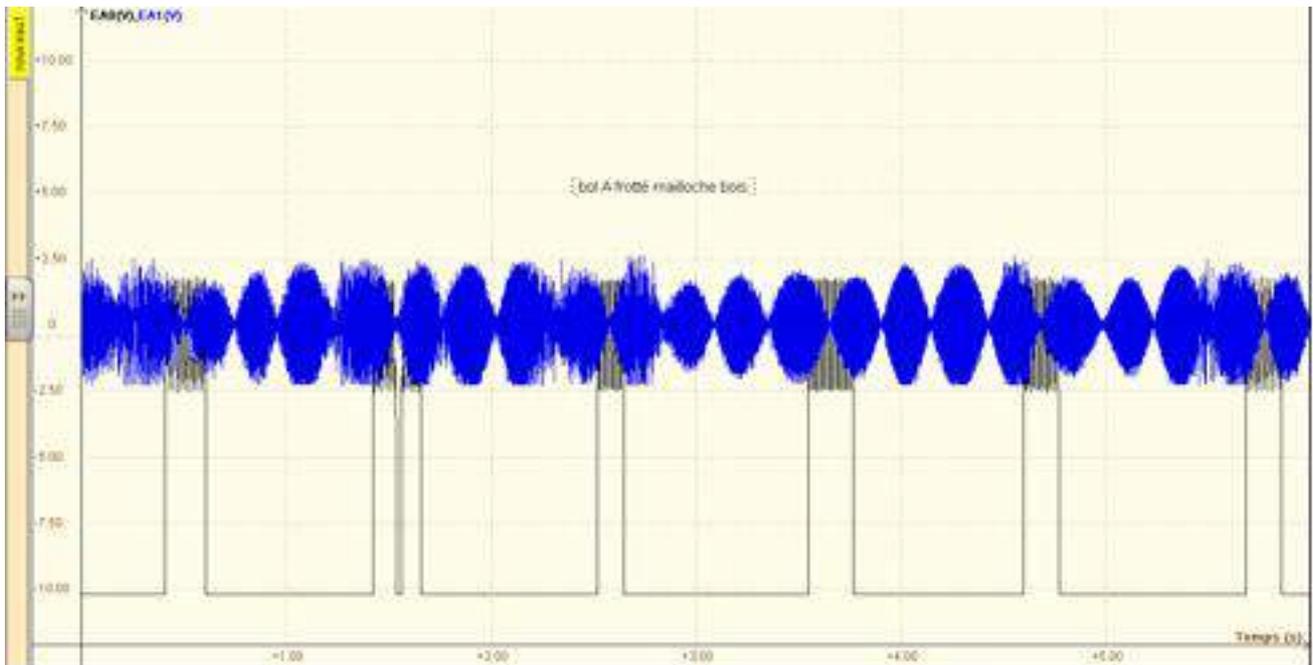


Figure 19 - Bol A frotté

En observant le graphique (figure 19), on peut compter le nombre de battements en un tour de mailloche. Le bol A qui vibre naturellement au mode 2 a 4 battements en un tour de mailloche. Tandis que dans le son des bols tibétains (qui vibrent au mode 3), on compte 6 battements, soit $2n$. Il y a donc une relation entre les battements et le mode de vibration des bols tibétains.

Sur le graphique obtenu à l'aide de Synchronie 6, (image A), on peut constater qu'à chaque pic de tension correspond un nœud de pression. Un nœud suit donc la mailloche ce qui implique que la figure tourne avec la mailloche.

On sait que le son est une onde longitudinale, qui se propage dans le même sens que la déformation à l'origine de l'onde et qu'il est dû au déplacement radial. Or la mailloche frotte et tourne autour des parois externes du bol et elle arrache sur son passage des particules qu'elle déplace : c'est la déformation tangentielle. Ainsi, au passage de la mailloche devant le micro, la déformation tangentielle en ce point est maximale et la déformation radiale est nulle donc il n'y a pas de son.

Ce montage nous permet aussi de mettre en évidence la relation qui existe entre la mailloche et les battements. Nous avons fait cette même manipulation avec l'un de nos bols en décélérant et accélérant le mouvement de la mailloche autour du bol à chaque tour. Cette figure se trouve en annexe. On constate alors que la période des battements varie fortement en fonction de la vitesse de la mailloche. Lorsque la mailloche ralentit, la période des battements augmente et au contraire, lorsque le mouvement accélère, la période diminue.

Conclusion

Ainsi, lorsqu'on excite le bol tibétain, son comportement est comparable à celui des verres à vin par la création d'un réseau d'ondes stationnaires issues de deux ondes mécaniques à l'origine du son.

Comme pour tout instrument de musique, le bol tibétain, sous l'effet d'une excitation se déforme selon un axe horizontal pour rentrer en vibration. Il est notamment caractérisé par une fréquence fondamentale qui lui est propre ainsi qu'un mode naturel de résonance qui détermine le nombre de nœuds et de ventres des ondes stationnaires formées. La détermination des différents paramètres entrant en jeu dans l'analyse acoustique (mode, fréquences, épaisseur, diamètre...) nous a permis de calculer le module de Young et ainsi de déterminer les différents matériaux composant les bols.

L'étude des battements présents dans le son des bols tibétains nous a permis de distinguer deux sortes de battements différents : les battements qui ont pour origine la dissymétrie du bol et ceux dus au mouvement de rotation de la mailloche autour du bol. Les battements dus à la mailloche sont synchronisés avec celle-ci et ont un lien avec le mode de vibration du bol.

À titre plus personnel, cette expérience d'Olympiades nous a permis d'apprendre à suivre une démarche expérimentale dans son intégralité. Nous nous sommes rendu compte qu'avant de commencer les manipulations, il est indispensable de procéder à une réflexion théorique sur la question pour adapter le modèle et anticiper les résultats ce qui nous a poussés à être critique envers nos résultats pour leur donner un sens. De plus, les différents montages réalisés au cours de cette année nous ont demandé de la créativité et de la volonté pour ne pas rester sur nos échecs.

Au travers de l'étude d'un instrument peu connu, nous avons pris plaisir à découvrir et à étudier plus en détails des principes physiques basiques mais fondamentaux. Si ce n'était pas déjà le cas, nous avons assurément apprécié de travailler la physique et de mener en groupe une démarche scientifique.

Remerciements

Nous avons pris un réel plaisir à préparer le concours des *Olympiades de physique* et souhaiterions remercier tous ceux qui nous ont permis de vivre pleinement cette expérience.

Nous aimerions remercier, tout particulièrement, Mme Brigitte PIVETEAU, qui nous a lancés dans cette aventure et nous a apportées une aide très précieuse par sa disponibilité et son soutien. Nous adressons également nos remerciements à M. John BUSH, professeur de Mathématiques Appliquées au département de Mathématiques du MIT, qui a accepté de nous rencontrer et nous donner les pistes nécessaires à la réalisation de notre projet. Tous nos remerciements à M. David QUÉRÉ, professeur à l'école Polytechnique et au CNRS, pour avoir facilité cette rencontre.

Merci également à M. Denis TERWAGNE, de l'Université libre de Bruxelles, pour avoir répondu à nos questions.

Nous tenons également à remercier le Comité des Olympiades de Physique de nous avoir permis de relever ce défi et de mener à bien notre projet par les aides financières qu'il nous a apportées.

Bibliographie

- Terwagne D., Bush J. W. M., IOP Publishing, Nonlinearity 24 (2011) R51 (Tibetan singing bowls)
- Inacio O., Henrique L. L., Antunes J., 34th Spanish National Acoustics Congress and EEA Symposium, 2003 (The dynamics of tibetan singing bowls)
- French A. P., Am. J. Phys, 51, 688 (In Vino Veritas: a study of wineglass acoustics)
- J-C Chapuis, Pour la science, N°27 juin 2000 (Ces si délicats instruments de verre)

Résonnons avec le bol tibétain

ANNEXES

Hélène de Lachaux

Sara Lasagni

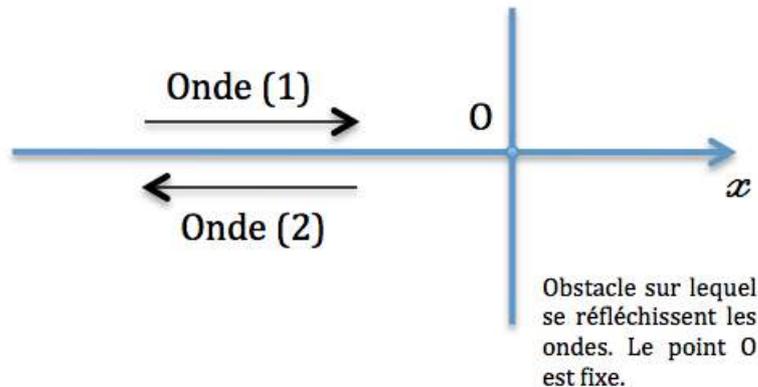
Félicie Levinton

Thaïs Masseï

École Alsacienne Paris VI^{ème}

Ondes stationnaires

Montrons que la somme de deux ondes progressives sinusoïdales y_1 et y_2 de même fréquence, même amplitude, et qui se propagent suivant la même direction Ox mais en sens contraire peut produire une onde stationnaire.



Soit $y = y_1 + y_2$

Avec $y_1 = A \cdot \cos(\omega t - kx)$

Et $y_2 = A \cdot \cos(\omega t + kx + \phi)$

L'onde résultante s'écrit $y_1 + y_2 = A \cdot \cos(\omega t - kx) + A \cdot \cos(\omega t + kx + \phi)$

Avec,

- y , l'expression de l'onde stationnaire ;
- y_1 et y_2 , les expressions respectives des ondes progressives y_1 et y_2 ;
- $\omega = 2\pi f$, la pulsation ;
- k , le nombre d'ondes $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{v}$;
- ϕ , le déphasage, dépend de la condition imposée par l'obstacle.

Le point 0, d'abscisse $x=0$, est fixe donc on doit avoir : $0 = A(\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx + \phi))$.

Ceci n'est possible que si et seulement si $\phi = (2n + 1)\pi$ où n est un entier naturel. Dans ce cas, l'expression de y_2 devient : $y_2 = A \cdot \cos(\omega t + kx + (2n + 1)\pi) = -A \cdot \cos(\omega t + kx)$

Donc

$$y = A(\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx))$$

$$\text{Or } \cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$\text{Donc } y = -2A \left(\sin\left(\frac{-2kx}{2}\right) \sin\left(\frac{2\omega t}{2}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow y = -2A(\sin(-kx) \sin(\omega t)) = 2A(\sin(kx) \sin(\omega t))$$

Ceci est l'expression d'une onde stationnaire. En effet, montrons que certains points du milieu (appelés nœuds) ne vibrent pas tandis que d'autres points (appelés ventres) vibrent avec une amplitude maximale.

En un nœud $y = 0$.

$$y = 2A(\sin(kx) \sin(\omega t)) = 0$$

Or A ne peut pas être nulle car sinon il n'y a plus d'ondes progressives donc :

$$\sin(kx) \sin(\omega t) = 0 \leftrightarrow kx = 0 \text{ ou } kx = n\pi$$

On sait que $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$\leftrightarrow x = \frac{n\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}} \leftrightarrow \frac{n\lambda}{2}$$

On a donc prouvé l'existence de points fixes, les nœuds et que ceux-ci étaient équidistants de $\frac{\lambda}{2}$ mètre.

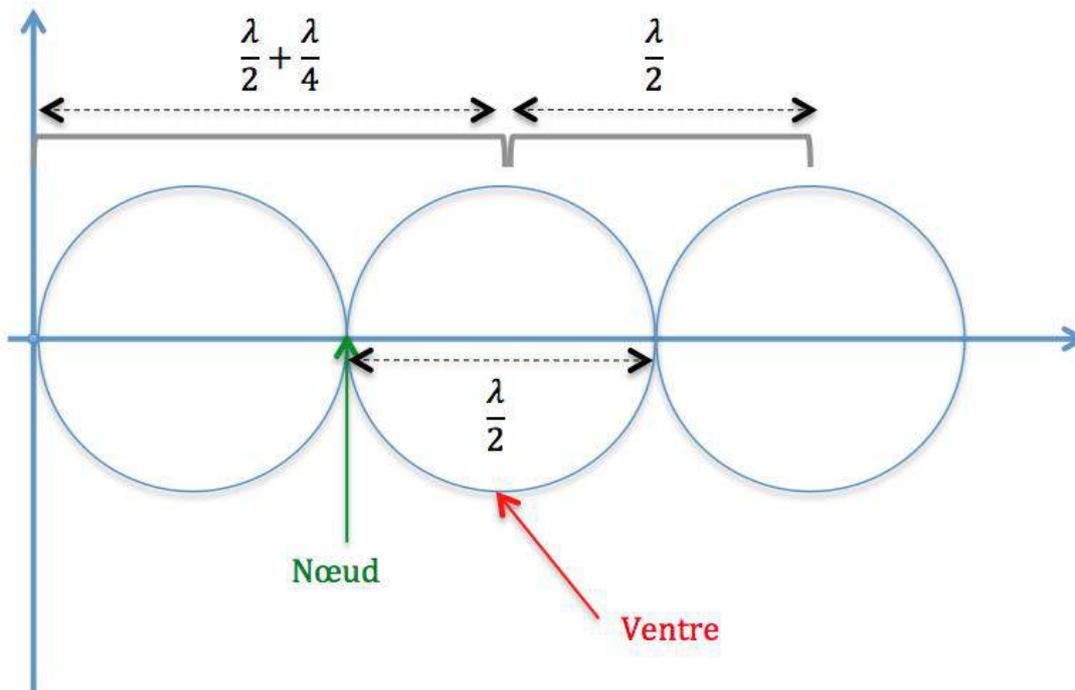
Trouver la position des ventres revient à résoudre $y = \pm 1$

$$y = \pm 1 \leftrightarrow \sin(kx) = \pm 1$$

avec $kx = \frac{n\pi}{2}$ si x est pair ou $kx = \frac{-n\pi}{2}$ si x est impair.

$$\leftrightarrow kx = \frac{(2n+1)\pi}{2} \leftrightarrow x = \frac{\frac{(2n+1)\pi}{2}}{\frac{2\pi}{\lambda}} \leftrightarrow x = \frac{(2n+1)\lambda}{4} = \frac{n\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$$

On a donc prouvé que l'existence de points vibrant avec une amplitude maximale, les ventres et qu'ils sont équidistants de $\frac{\lambda}{2}$ mètre.



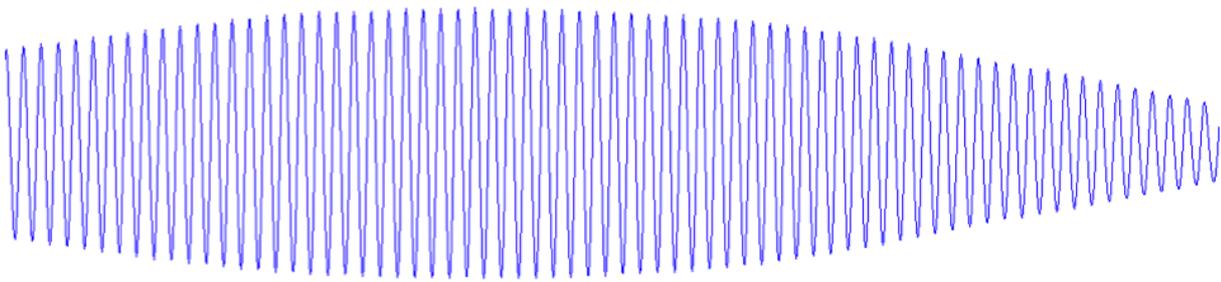


Figure 4 -Signal sonore bol A frotté

Fréquence	f	$2f$	$3f$	$4f$
Bol A	310 Hz	618 Hz	929 Hz	1247 Hz
Bol B	377 Hz	751 Hz	1132 Hz	
Bol C	675 Hz	1275 Hz	1952 Hz	
Bol D	658 Hz	1317 Hz	1972 Hz	
Bol E	210 Hz	419 Hz	627 Hz	836 Hz
Bol F	379 Hz	761 Hz	1137 Hz	
Bol G	988 Hz	1979 Hz	2958 Hz	

Tableau 2 - Fréquences des différents bols

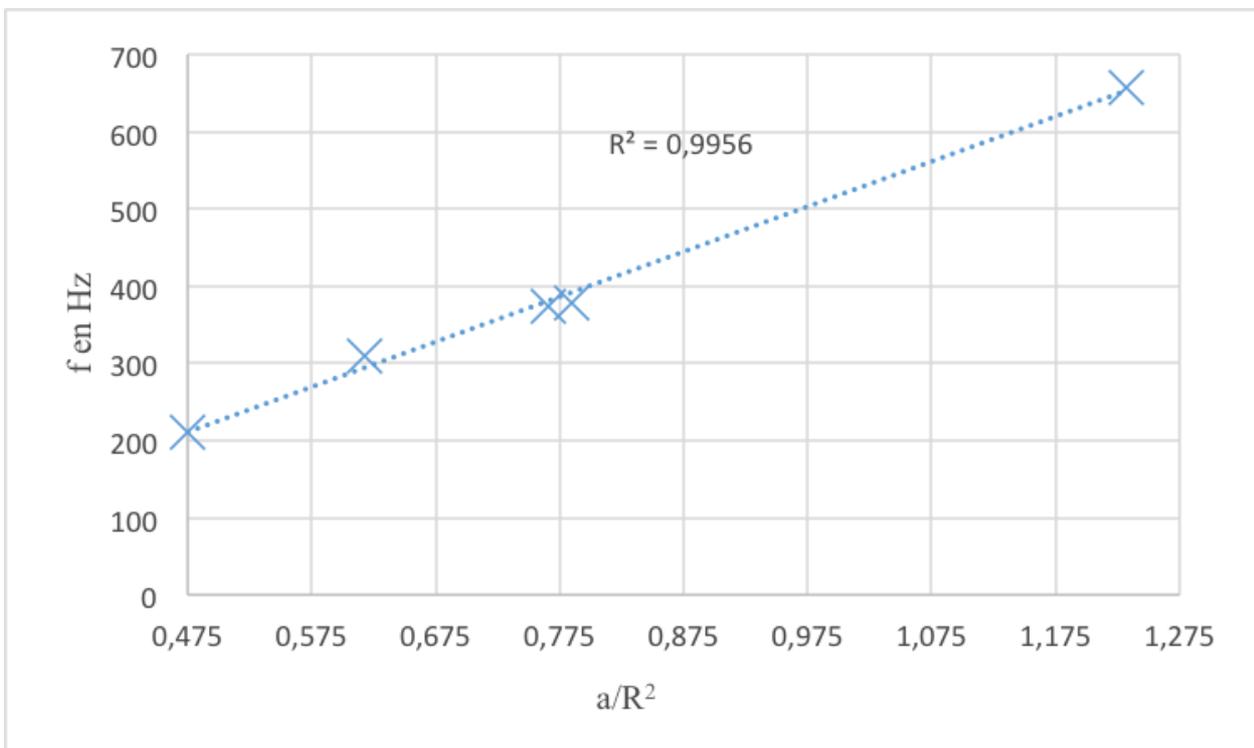


Figure 7 - graphique représentatif de $f = f(a/R^2)$



Figure 8 - Spectre de Fourier bol A frappé

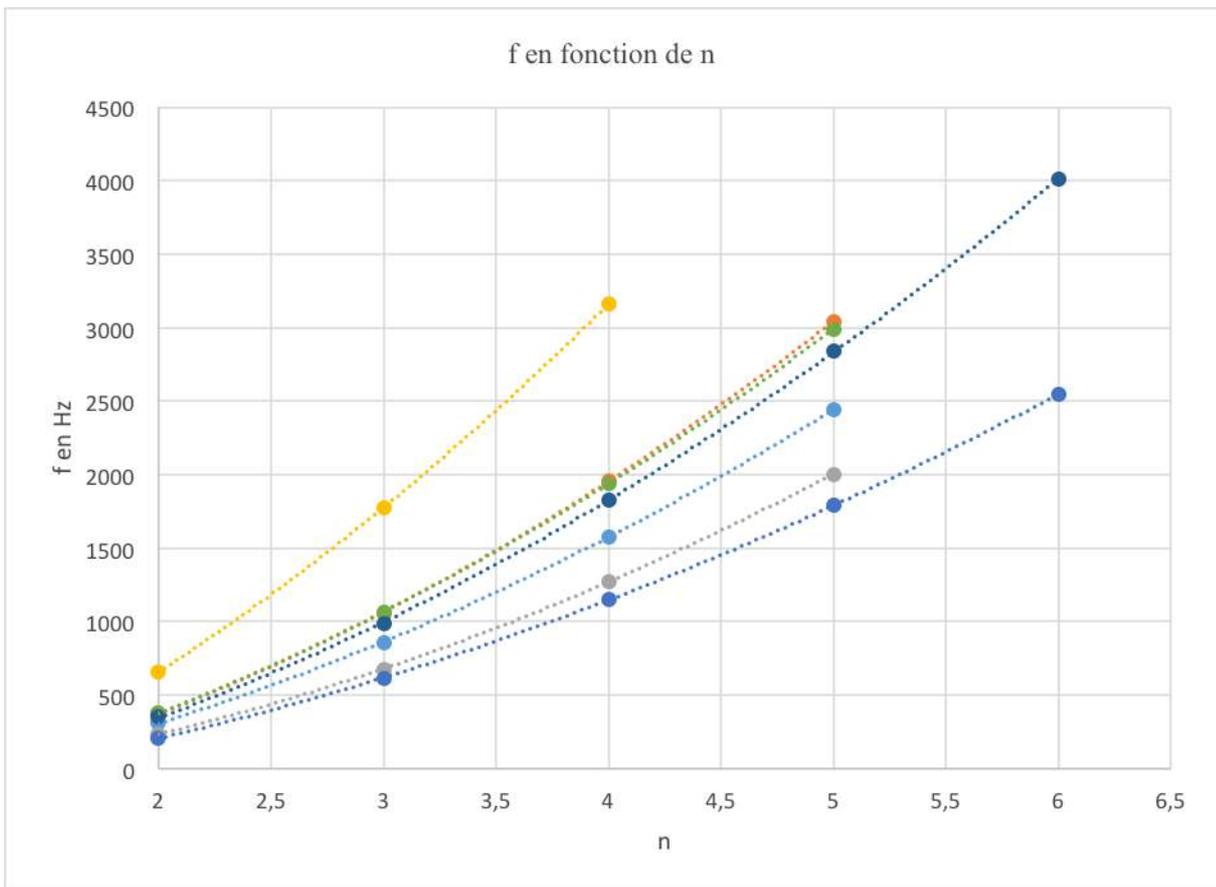


Figure 9 - graphique représentatif de $f = f(n)$

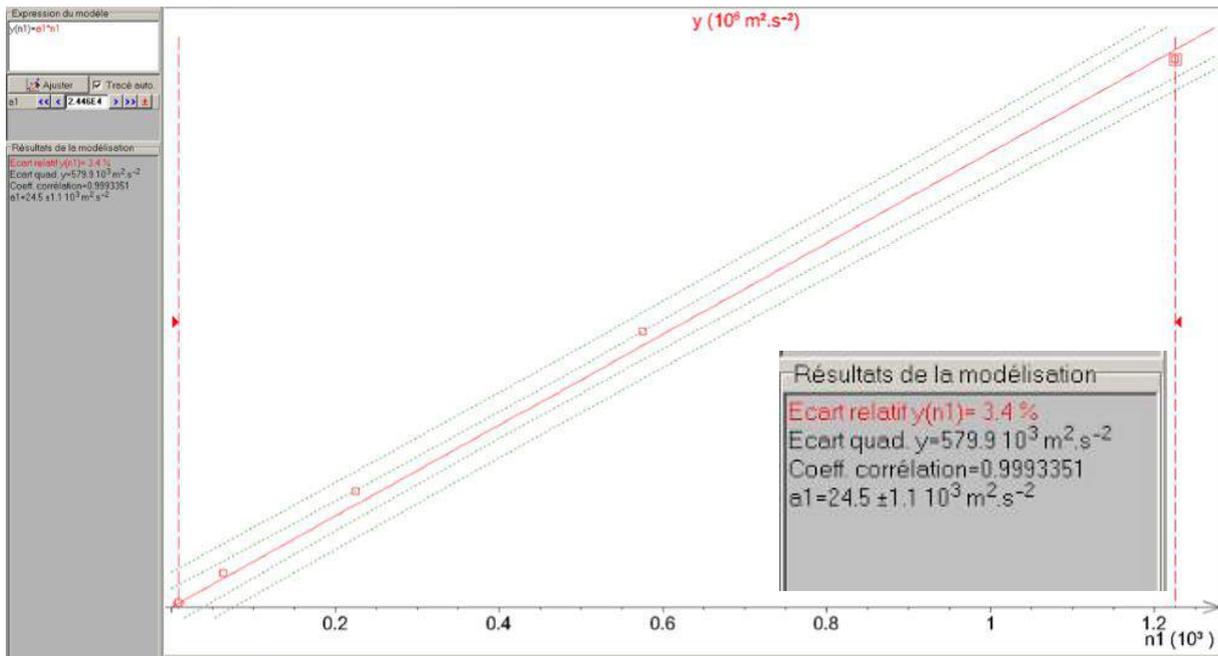


Figure 123 – Graphique obtenu à l'aide du logiciel *Regressi*

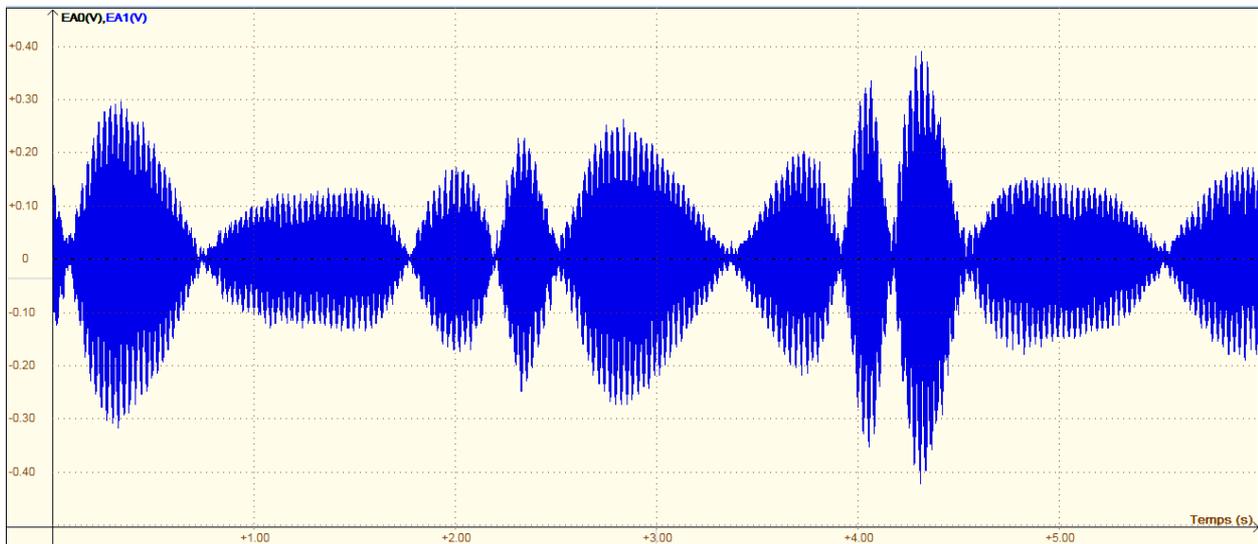


Figure 15 – Synchronie en faisant varier la vitesse de la mailluche

Fabrication d'un plateau tournant motorisé

Matériel :

- Un plateau à fromage avec un pied tournant
- Du carton
- De la ficelle
- De la "Patafix"
- Un batteur à œufs électrique
- Pied
- pince

Le principe est inspiré de celui du yoyo. Le plateau supérieur fixé à un pied tournant par rapport au socle est entraîné par une ficelle fixée au pied. Après avoir scotché le début de la ficelle au pied, on la bobine. Afin que la ficelle reste dans l'axe, on l'entoure de "Patafix".

L'autre extrémité de la ficelle est collée à une broche du batteur à œufs. Ainsi lorsque le batteur est mis en marche, la ficelle s'enroule autour de la broche. Le pied et le plateau supérieur sont donc entraînés et se mettent en mouvement.



On fixe alors avec de la "Patafix" le bol tibétain au plateau supérieur. On accroche la mailloche à un pied de façon à celle qu'elle soit en contact permanent avec les parois du bol. Puis on démarre le batteur électrique. La mailloche est donc en mouvement de rotation relativement au bol tibétain.

